864

华南理工大学
2017年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

（请在答题纸上做答，试卷上做答无效，试后本卷必须与答题纸一同交回）

科目名称：高等代数

适用专业：基础数学, 应用数学, 计算数学, 概率论与数理统计, 运筹学与控制论

1. (15分) 设$g(x), h(x)$是数域P上的多项式, $\partial(g(x)) = m, \partial(h(x)) = n$, 且$(g(x), h(x)) = 1$. 又设$f(x)$是$P$上的任一个次数$< n+m$的多项式. 证明: 存在$r(x), s(x) \in P[x]$使得

$$f(x) = r(x)g(x) + s(x)h(x),$$

其中$r(x) = 0$或者$\partial(r(x)) < n$, $\partial(s(x)) < m$.

2. (20分) 设三元非齐次线性方程组$AX = b$的系数矩阵的秩$r(A) = 1$, 这里A为三阶方阵, $X = (x_1, x_2, x_3)'$, $b = (b_1, b_2, b_3)' \neq 0$. 已知$\eta_1, \eta_2, \eta_3$是$AX = b$的三个解向量, $\eta_1 + \eta_2 = (1, 2, 3)'$, $\eta_2 + \eta_3 = (0, -1, 1)'$, $\eta_3 + \eta_1 = (1, 0, -1)'$, 求该方程组的基础解系.

3. (20分) 设A为n阶方阵, A的(i, j)-元素$a_{ij} = |i - j|$, 求行列式$|A|$的值.

4. (20分) 已知$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是三维欧氏空间$V$的一组基, 且这组基的度量矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

求V的一组标准正交基(用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$表示出来).

5. **(20分)** 设$\boldsymbol{V}$是数域$\boldsymbol{P}$上的$\boldsymbol{n}$维线性空间，$\boldsymbol{V_1}$是$\boldsymbol{V}$的子空间且$\dim \boldsymbol{V_1} \geq \frac{n}{2}$.

(1) 证明：存在$\boldsymbol{V}$的子空间$\boldsymbol{W_1}, \boldsymbol{W_2}$使得

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V_1} \oplus \boldsymbol{W_1} = \boldsymbol{V_1} \oplus \boldsymbol{W_2}, \text{而} \boldsymbol{W_1} \cap \boldsymbol{W_2} = \{0\};$$

(2) 问：当$\dim \boldsymbol{V_1} < \frac{n}{2}$时，上述结论是否成立？为什么？

6. **(20分)** 设$\boldsymbol{f(x), g(x)}$是数域$\boldsymbol{P}$上的多项式，$(\boldsymbol{f(x), g(x)}) = 1$，$\boldsymbol{A}$是$\boldsymbol{P}$上的$\boldsymbol{n}$阶方阵. 证明：$\boldsymbol{f(A)g(A) = 0}$当且仅当$\boldsymbol{r(f(A)) + r(g(A)) = n}$.

7. **(20分)** 设$\boldsymbol{A}$是复数域$\mathbb{C}$上的任一个$\boldsymbol{n}$阶方阵.

(1) 设$\boldsymbol{\lambda_1}$是$\boldsymbol{A}$的一个特征值，证明：存在$\mathbb{C}$上的$\boldsymbol{n}$阶可逆方阵$\boldsymbol{T}$使得

$$\boldsymbol{T^{-1}AT} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix};$$

(2) 对$\boldsymbol{n}$作归纳法证明，$\boldsymbol{A}$必相似于一个上三角矩阵：

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ & \lambda_2 & \cdots & c_{2n} \\ & & \cdots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

8. **(15分)** 设$\boldsymbol{\mathcal{A}}$是$\boldsymbol{n}$维欧氏空间$\boldsymbol{V}$的对称变换. 证明：对$\forall \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$都有$(\boldsymbol{\mathcal{A}\alpha, \alpha}) \geq 0$ 的充分必要条件是$\boldsymbol{\mathcal{A}}$的特征值全是非负实数.