

华南理工大学
2017 年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

(试卷上做答无效, 请在答题纸上做答, 试后本卷必须与答题纸一同交回)

科目名称: 数学分析

适用专业: 基础数学; 计算数学; 概率论与数理统计; 应用数学; 运筹学与控制论

共 2 页

1. (10 分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt - x \cos x}{x - \sin x}$.

2. (10 分) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^{\frac{1}{k}}$.

3. (10 分) 计算积分 $\int_0^1 \frac{x^\alpha - x^\beta}{\ln x} \sin(\ln x) dx$ ($\alpha > \beta > 0$).

4. (10 分) 计算曲线积分 $\iint_C y^2 ds$, 其中 C 为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与 $x + y + z = 0$ 的交线.

5. (10 分) 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (2x+3) dydz + (3z+4) dxdy$, 其中 Σ 为顶点是 $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$ 及 $(0, 0, 1)$ 的四面体的外表面.

6. (10 分) 设 $f(x)$ 在 (a, b) 区间连续, 取 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, 试证存在 $\xi \in [x_1, x_n]$, 使得 $f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$.

7. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续, 且对 $\forall \varepsilon > 0$, 积分 $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 都收敛, 试证对 $\forall z > y > 0$, 有 $\int_0^{+\infty} \frac{f(xy) - f(xz)}{x} dx = f(0) \ln \frac{z}{y}$.

8. (15 分) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ 的收敛域及和函数.

9. (15 分) 研究 $u = xyz$ 在条件 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 及 $x + y + z = 0$ 之下是否有极值.

10. (15 分) 设不收敛数列 $\{x_n\}$ 有界, 试证存在 $\{x_n\}$ 的两个收敛子列 $\{x_{n_k}^{(1)}\}$ 及 $\{x_{n_k}^{(2)}\}$ 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^{(1)} \neq \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^{(2)}$.

11. (15 分) 设 $f(x, y)$ 的二阶混合偏导数在 (x_0, y_0) 的邻域内连续, 试证存在 $0 < \theta_i < 1$ ($i=1, 2, 3, 4$), 使得 $f_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f_{yx}(x_0 + \theta_3 \Delta x, y_0 + \theta_4 \Delta y)$.

12. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导且满足

(1) $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ 对 $\forall x \in [a, b]$;

(2) $f(a) < 0, f(b) > 0$;

令 $x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ($n=1, 2, \dots$).

试证 $\{x_n\}$ 收敛到 $f(x)$ 在 (a, b) 上的零点.