中 山 大 学

2017 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：432

科目名称：统计学

考试时间：2016 年 12 月 25 日 下午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分！答题要写清题号，不必抄题。

一、（每小题 3 分，共 60 分）单项选择题。

1. 在概率的公理化结构中，把概率所满足的条件中的可列可加性换成有限可加性，则下列概率的性质中不成立的是（）

（A） $P(\emptyset)=0$

（B） 对任何事件A，$P(\bar{A})=1-P(A)$

（C） S_n是一个单调不减的集序列， $\lim_{n\to\infty}P(S_n)=P(\lim_{n\to\infty}S_n)$

（D） $P(AB)\geq P(A)+P(B)-1$

2. 对任意两个随机事件A与B，必有 $P(A\cap\bar{B})=$（）

（A） $P(A)-P(B)$　　（B） $P(A)-P(B)+P(AB)$

（C） $P(A)+P(B)$　　（D） $P(A)-P(AB)$

3. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，其中恰有一双配对的概率是（）

（A） 2/3　　（B） 4/7　　（C） 2/7　　（D） 1/3

4. 如果你的水平略高于对手，为保证比赛的胜利，你最期望以下哪种比赛规则（）

（A） 一局定输赢　　（B） 三局两胜　　（C） 五局三胜　　（D） 不能确定

5. 随机变量X，Y均只能取 0，1 两个值。下面哪个选项不是与“它们的相关系数为 0”等价（）

（A） 随机变量X，Y相互独立　　（B） $P(X=1,Y=0)=P(X=1)P(Y=0)$

（C） $P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0)$　　（D） $E(XY)=0$

考试完毕，试题随答题纸一起交回。

6. 有两条蚕，每条蚕的产卵数相互独立并服从泊松分布，参数分别为λ_1和λ_2。每个卵孵化成小蚕的概率为$p\ (0<p<1)$，且“每个卵能孵化为小蚕与否”相互独立。记两条蚕养活的小蚕总数为Y，则①Y服从的分布；②两条蚕总共能孵化小蚕数的期望分别是（）

（A） 泊松分布，$(\lambda_1+\lambda_2)p$ （B） 泊松分布，$\lambda_1+\lambda_2$

（C） 二项分布，$(\lambda_1+\lambda_2)p$ （D） 二项分布，$\lambda_1+\lambda_2$

7. 甲盒中有 4 个白球，1 个黑球；乙盒中有 4 个白球，3 个黑球。从甲盒中任取一球放入乙盒，然后再从乙盒中任取一球。则①在乙盒中取到的是白球的概率；②如果已知在乙盒中取到的是白球，从甲盒中取出放入乙盒中的也是白球的概率分别是（）

（A） 1/2， 5/6 （B） 3/5， 5/6 （C） 1/2， 4/5 （D） 3/5， 4/5

8. 英国《观察家报》和 Opinium 公司 2016 年 6 月初进行的联合民意调查显示，40%英国民众支持留在欧盟。考虑一个由 600 名英国民众组成的随机样本，以X表示这 600 人中支持留在欧盟的人数。记$\Phi(x)$是标准正态分布的分布函数，则$222<X<258$的概率大约是（）

（A） $2\Phi(1.5)-1$ （B） $2\Phi(1.5)$ （C） $2\Phi(2)$ （D） $2\Phi(2)-1$

9. 设随机变量序列X_n几乎处处收敛到随机变量X，则下列说法不正确的是（）

（A） X_n依概率收敛到X （B） X_n依分布收敛到X

（C） X_n二阶矩收敛到X （D） X_n^2几乎处处收敛到X^2

10. 设X和Y均服从标准正态分布，则（）

（A） $X-Y$服从正态分布 （B） X^2+Y^2服从卡方分布

（C） $Y|X$服从正态分布 （D） X^2服从卡方分布

11. 设$X\sim\chi^2(1)$, $Y\sim\chi^2(n)$, 则$F=nX/Y$的分布是（）

（A） $t(n)$ （B） $F(1,n)$ （C） $F(n,1)$ （D） 不能确定

12. 设$X_1,\cdots,X_n$为来自标准正态分布$N(0,1)$的简单随机样本。令$\bar{X}=\sum_{i=1}^n X_i/n$为样本均值，$S^2=\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2/(n-1)$为样本方差，则（）

（A） $\frac{n\bar{X}^2}{S^2}\sim F(1,n-1)$ （B） $n\bar{X}^2\sim\chi^2(n)$

（C） $nS^2\sim\chi^2(n-1)$ （D） $(n-1)S^2\sim\chi^2(n)$

13. 设$X_1,\cdots,X_n$为来自均匀分布$U(1-\theta,1+\theta)$的简单随机样本，其顺序统计量记为$X_{(1)},\cdots,X_{(n)}$，则θ的充分统计量为（）

（A） $X_{(1)}$ （B） $X_{(n)}$ （C） $\max_i\{|X_i-1|\}$ （D） $X_{(n)}-X_{(1)}$

14. 设$X_1,\cdots,X_n$为来自指数分布$\mathrm{Exp}(\lambda)$的简单随机样本，密度函数为$f(x;\lambda)=\lambda e^{-\lambda x},x>0$。令$T=\sum_{i=1}^n X_i$，$Q=\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2$，则（）

（A） T与Q/T^2独立 （B） T与Q独立

（C） T服从参数为$n\lambda$的指数分布 （D） T服从参数为λ/n的指数分布

15. 设样本$X_1,\cdots,X_n(n\ge 2)$来自参数为$\theta(>0)$的泊松（Poisson）分布，概率分布列为$f(x;\theta)=\frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}$，$x=0,1,2,\ldots$。令$\bar{X}=\sum_{i=1}^n X_i/n$为样本均值，$S^2=\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2/(n-1)$为样本方差，若$Y=a\bar{X}+(1-a)S^2, 0\le a\le 1$为$\theta$的无偏估计，则（）

（A）$a=0$ （B） $a=1$ （C） $a=0.5$ （D） 以上皆可

16. 设$X_1,\cdots,X_n$为来自均值为0，方差为σ^2的总体的简单随机样本，令$Y=\sum_{i=1}^n X_i^2$，$Q=\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2$，则下列说法正确的是（）

（A） Q/n是σ^2的最大似然估计 （B） Y/n是σ^2的最大似然估计

（C） Q/n是σ^2的无偏估计 （D） Y/n是σ^2的无偏估计

17. 设X_1,X_2,X_3为来自均值为μ的总体的简单随机样本，则下列μ的估计量中方差最小的是（）

（A） $\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{2}X_2+\frac{1}{4}X_3$ （B） $\frac{4}{5}X_1+\frac{2}{5}X_2-\frac{1}{5}X_3$

（C） $\frac{2}{3}X_1-\frac{1}{3}X_2+\frac{2}{3}X_3$ （D） $\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{6}X_3$

18. 设$X_1,\cdots,X_5$为来自均匀分布$U(0,\theta)$的简单随机样本，令$Y_1=\min\{X_i\}$, $Y_5=\max\{X_i\}$, 则θ的 90%置信区间为（）

（A） $\left(\frac{Y_1}{\sqrt[5]{0.95}},\ \frac{Y_1}{\sqrt[5]{0.05}}\right)$ （B） $\left(\frac{Y_5}{\sqrt[5]{0.95}},\ \frac{Y_5}{\sqrt[5]{0.05}}\right)$

（C） $\left(\frac{Y_1}{\sqrt[5]{0.9}},\ \frac{Y_5}{\sqrt[5]{0.9}}\right)$ （D） $\left(\frac{Y_1}{1-\sqrt[5]{0.1}},\ \frac{Y_5}{\sqrt[5]{0.1}}\right)$

19. 设$X_1,\cdots,X_n$为来自正态总体$N(\mu,1)$的简单随机样本，令$\bar{X}=\sum_{i=1}^n X_i/n$为样本均值。针对假设$\mathrm{H}_0:\mu\le 0$ $v.s.$ $\mathrm{H}_1:\mu>0$，显著性水平$\alpha=0.05$，拒绝域为（）

（A）$\sqrt{n}\bar{X}<-1.96$ （B） $\sqrt{n}\bar{X}>1.96$ （C）$\sqrt{n}\bar{X}<-1.64$ （D） $\sqrt{n}\bar{X}>1.64$

20. 线性模型$Y_i=aX_i+e_i, i=1,\ldots,n$，$e_i, i=1,\ldots,n$独立同分布于正态分布$N(0,\sigma^2)$。令$\bar{X}=\sum_{i=1}^n X_i/n$，$\bar{Y}=\sum_{i=1}^n Y_i/n$则 a的最大似然估计是（）

（A）$\bar{X}$ （B）$\bar{Y}$ （C）$\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}$ （D） $\frac{\sum_{i=1}^n X_iY_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2}$

二、（24分）设随机向量(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1）（8分）求$X=0.5$时，Y的条件密度$f(y|x=0.5)$。

（2）（8分）求X和Y的相关系数ρ。

（3）（8分）求$Z=X+Y$的密度函数。

三、（24分）设$X_1,\cdots,X_n$来自以下总体，其密度函数为

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}}, & 0<x\le\beta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中$\alpha(>0)$和$\beta(>0)$为未知参数。

（1）（6分）求总体的期望以及方差。

（2）（8分）写出α和β的充分统计量。

（3）（10分）求α和β的最大似然估计量。

四、（24分）设样本$X_1,\cdots,X_n(n\ge 2)$来自参数为$\theta(>0)$的泊松（Poisson）分布，概率分布列为$f(x;\theta)=\frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}$，$x=0,1,2,\ldots$。令$g(\theta)=e^{-\theta}$，$Y=\mathrm{I}(X_1=0)$，其中I为示性函数。

（1）（6分）求$g(\theta)$的最大似然估计量。

（2）（8分）证明Y是$g(\theta)$的无偏估计量。

（3）（10分）求$g(\theta)$的最小方差无偏估计量。

五、（18分）设$X_1,\cdots,X_9$为来自正态总体$N(\mu_1,1)$的简单随机样本，$Y_1,\cdots,Y_{16}$为来自正态总体$N(\mu_2,1)$的简单随机样本，且两样本独立。针对假设$\mathrm{H}_0{:}\ \mu_1=\mu_2=0\ \ v.s.\ \ \mathrm{H}_1{:}\ \mu_1\ne 0$或$\mu_2\ne 0$。

（1）（8分）若给出拒绝域为$C=\{|\bar{X}-\bar{Y}|>b\}$，求常数$b$，使其显著性水平$\alpha=0.05$。

（2）（10分）给定显著性水平$\alpha=0.05$，请构建似然比检验。要求：写出似然比统计量，并把它表示为一个服从χ^2分布的统计量T的函数形式，并以T的形式给出拒绝域。

附：

（1）标准正态分布的90%，95%，97.5%，99%分位数分别为1.28，1.64，1.96，2.33。

（2）自由度为1，2，3，4，9，16，23，24，25的χ^2分布的95%分位数分别为3.84，5.99，7.81，9.49，16.92，26.30，35.17，36.42，37.65。