# 中 山 大 学

## 2017 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：601

科目名称：高等数学（A）

考试时间：2016 年 12 月 25 日上午

**考 生 须 知**

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分!答题要写清题号，不必抄题。

本卷共十四大题，满分为 150 分。

一、（10 分，共 2 道小题，每小题 5 分）完成下列各题：

1. 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\tan x}-1}{\ln(x+1)}=3$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$。

2. 设矩阵 $A$ 满足 $A^2+A-4E=0$，其中 $E$ 为单位矩阵，求 $(A-E)^{-1}$。

二、（10 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{3^n}x^{2n+1}$ 的收敛半径和收敛域。

三、（10 分）求由曲线 $y=\dfrac{4}{x}$ 和直线 $y=x$ 及 $y=4x$ 在第一象限中围成的平面图形的面积。

四、（10 分）利用一阶和二阶偏导数求函数 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ 的极值。

五、（10 分）将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开成幂级数，并指出其收敛域。

六、（10 分）求常微分方程 $x^2y''+5xy'+13y=0\ (x>0)$ 的通解。

七、（10 分）求球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 在圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上方部分的面积。

八、（10 分）证明广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sqrt{x}\cos x}{x+3}\mathrm{d}x$ 收敛，并判断是绝对收敛还是条件收敛。

九、（10 分）设 $n$ 阶方阵 $A$ 的秩 $r(A)=n-1$，记 $\xi$ 为 $A^*$ 的某个非零列向量，其中 $A^*$ 为 $A$ 的伴随矩阵。证明：

（1） $\boldsymbol{AA^*=O}$；

（2） 方程组 $\boldsymbol{AX=O}$ 的通解为 $\boldsymbol{X=c\xi}$，其中 $c$ 为任意常数。

十、（10 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 $B=(kE+A)^2$，其中 $k$ 为实数，$E$ 为单位矩阵，求对角矩阵 $\Lambda$，使 $B$ 与 $\Lambda$ 相似，并求 $k$ 为何值时，$B$ 为正定矩阵。

十一、（12 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根，试求 $a$ 的值，并讨论 $A$ 能否与对角矩阵相似。

十二、（12 分）考虑函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2x}$，证明：

（1）该级数在区间 $(0,+\infty)$ 内不一致收敛，

（2）该级数在区间 $[\delta,+\infty)$ 内一致收敛（其中 $\delta>0$）。

十三、（12 分）计算曲线积分 $\int_L (xy+y+z)\mathrm{d}s$，其中 $L$ 是参数曲线 $\vec{r}(t)=(2t,t,2-2t),0\le t\le 1$。

十四、（14 分）试用格林公式计算参数曲线 $x=2\cos t+\cos 2t,\ y=2\sin t-\sin 2t,\ (0\le t\le 2\pi)$ 所围成的区域面积。