

中山大学

2017年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码: 602

科目名称: 高等数学(B)

考试时间: 2016年12月25日上午

考生须知

全部答案一律写在答题纸上, 答在试题纸上的不计分! 答题要写清题号, 不必抄题。

一. 填空题 (每小题5分, 共60分; 答案写在答题纸上并注明题号.)

1. 函数极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,0)} \frac{\arctan(|x/y|)}{x} =$ _____.

2. 函数 $y = \ln \sin x$, 则 $dy =$ _____ dx .

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan^2 \alpha x$ 与 $e^{2x^n} - 1$ 是等价无穷小, 则常数 $\alpha =$ _____, $n =$ _____.

4. 曲线 $\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^2} \\ y = \frac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$ 在 $t=2$ 处的切线方程是 _____.

5. 定义于 $[0, 2\pi]$ 上的函数 $y = e^x \cos(x)$ 在点 _____ 处有最小值 _____.

6. $\int \arctan x dx =$ _____.

7. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx =$ _____.

8. 设 $F(x) = \int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt$, 则 $\frac{dF(x)}{dx} =$ _____.

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2017}{x}\right)^{x+2017} =$ _____.

10. 求曲面 $z = 2x^2 + y^2 - 1$ 在点 $(1, 1, 2)$ 处的切平面方程是 _____.

11. 袋中有5个红球和2个黑球, 现从中无放回地取球, 每次取一个, 则三次内取到黑球的概率是 _____.

12. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{1+x^2}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

则 $a =$ _____.

二. (本题满分 12 分) 证明方程 $x^3 - 3x + c = 0$ 在区间 $[0,1]$ 内不可能有两个不同的实根.

三. (本题满分 12 分) 试求由一条曲线 $y = x^2$ 和两条直线 $x = 0, y = 4$ 所围成的图形的面积以及该图形绕 x 轴形成的旋转体体积.

四. (本题满分 14 分) 试求函数 $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$ 在 $x > 0$ 和 $y > 0$ 的区域中的极值.

五. (本题满分 12 分) 判定无穷级数的 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n)}$ 收敛性, 其中 $x > 0$.

六. (本题满分 15 分) 试求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 2xy^3 + 2x}{3x^2y^2 - 6y^5 + 3y^2}$ 的通解.

七. (本题满分 10 分) 自动生产线在维修后生产出次品的概率为 0.001. 如在生产过程中出现次品时立即维修, 请详细解答以下两个问题:

a) 求在两次维修之间生产的合格品数的分布?

b) 求两次维修之间平均能生产多少件合格产品?

八. (本题满分 15 分) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的一个简单随机样本,

$$\text{总体 } X \text{ 的密度为 } f(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} & , x > 0, \\ 0 & , x \leq 0, \end{cases}$$

a) 求 EX , 据此求 λ 的一个矩估计;

b) 求 λ 的最大似然估计.