中 山 大 学

2017年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：621

科目名称：一元微积分

考试时间：2016年12月25日 上 午

考 生 须 知
全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分!答

一、填空题（每小题6分，共6*5=30分）

1. 已知 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$，则 $a=$______ $b=$______.

2. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{(\arcsin x)^2}=$______.

3. 在区间$[0,\pi]$上曲线$y=\cos x, y=\sin x$之间所围图形的面积为_______.

4. 若 $y=\begin{cases}\sin x & -2<x<0\\ x^2+1 & 0\le x<2\end{cases}$，则 $y(\dfrac{\pi}{2})=$_______.

5. 三次曲线 $y=x^3+3ax^2+3bx+c$ 在 x=-1 处取得极大值，点(0,3)是拐点，则 a=______, b=______, c=_______.

二、选择题（每小题5分，共5*10=50分）

1. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在定义域内为（　）

A. 有上界无下界　　B. 有下界无上界

C. 有界，且 $-\dfrac{1}{2}\le f(x)\le\dfrac{1}{2}$　　D. 有界且 $-2\le f(x)\le 2$

2. 当 $x\to 0$ 时，下列函数哪一个是其他三个的高阶无穷小（　）

A. x^2　　B. $1-\cos x$　　C. $x-\tan x$　　D. $\ln(1+x^2)$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则函数 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导的充分条件是(　)

A. $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$　　B. $f(a)=0$ 且 $f'(a)\ne 0$

C. $f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$　　D. $f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$

4. 下面关于定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的说法正确的是（　）

A. 与 $f(x)$ 无关　　B. 与 $[a,b]$ 无关

C. 与 $\int_a^b f(t)dt$ 相等　　D. 是变量 x 的函数

5. 若$f(x)$在$[a,b]$连续且$\int_a^b f^2(x)dx=0$定积分，则（　　）

A．$f(x)$在$[a,b]$恒大于 0　　B. $f(x)$在$[a,b]$恒等于 0

C. $f(x)$在$[a,b]$不小于 0　　D. $f(x)$在$[a,b]$的值不确定

6. 关于数列$\{x_n\}$的子列，下列叙述错误的是（　　）

A. 若$\{x_n\}$是柯西列，则$\{x_n\}$的任一子列都收敛；

B. 若$\{x_n\}$是有界数列，则$\{x_n\}$必有一子列收敛；

C. 若$\{x_n\}$是无界数列，则$\{x_n\}$的任一子列都不收敛；

D. 若$n\to\infty$当时，$\{x_n\}$是无穷大量，则$\{x_n\}$的任意子列都不收敛.

7. 设$\int f(x)dx=x^2+C$，则$\int xf(1-x^2)dx$为（　　）

A. $-2(1-x^2)^2+C$　　B. $2(1-x^2)^2+C$

C. $-\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C$　　D. $\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C$

8. 设$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，且$f(x)>0,f'(x)<0,f''(x)<0$.记

$S_1=\int_a^b f(x)dx$　$S_2=f(b)(b-a)$，$S_3=\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$，则有（　　）.

A. $S_1<S_2<S_3$　B. $S_2<S_3<S_1$　C. $S_3<S_1<S_2$　D. $S_1<S_3<S_2$

9. 曲线$y=x(x-1)(2-x)$与x轴所围图形面积可表示为（　　）

A. $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx+\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx$

B. $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx$

C. $\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx$

D. $\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx-\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx$

10. 设在[0,1]上$f''(x)>0$，则$f'(0),f'(1),f(1)-f(0)$或$f(0)-f(1)$的大小顺序为（　　）

A. $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　B. $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

C. $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　D. $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

三、计算题（每小题 8 分，共 5*8=40 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$

2. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{1/2}\frac{x^n}{1+x^2}dx$

3. 求不定积分 $\int\frac{dx}{x(2+x^{10})}$

4. 求定积分 $\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$

5. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$，求 $f'(1)$

四、证明题（每小题 15 分，共 2*15=30 分）

1. 求证：若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导，且极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 都存在，则极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且单调递减，
求证：函数 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递减。