中 山 大 学

2017 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：896

科目名称：高等代数(A)

考试时间：2016 年 12 月 25 日 下 午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分！答题要写清题号，不必抄题。

1. (10 分) 求下列多项式的有理数零点：
$x^3-6x^2+15x-14$;

2. (15 分) 求 A 的全部特征值和对应的特征向量

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix},$$

3. (15 分) 用矩阵消元法求下列线性方程组的解：

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4,\\ x_2-x_3+x_4=-3,\\ x_1+3x_2+x_4=1,\\ -7x_2+3x_3+x_4=-3.\end{cases}$$

4. (10 分) 判断下列向量组是否线性相关：
$\mathbf{a}_1=(1,3,5,-4,0)$, $\mathbf{a}_2=(1,3,2,-2,1)$,
$\mathbf{a}_3=(1,-2,1,-1,-1)$, $\mathbf{a}_4=(1,-4,1,1,-1)$;

5. (10 分) 求

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\2&-1&1\end{bmatrix}$$

的逆矩阵。

6. (20 分) 设γ_0是数域 K 上的线性方程组的一个特解，η_1，η_2，…，η_s是其导出方程组的一个基础解系，令

$$\gamma_1 = \gamma_0 + \eta_1,\ \gamma_2 = \gamma_0 + \eta_2,\ \cdots,\ \gamma_s = \gamma_0 + \eta_s,$$

证明：线性方程组的任一解 γ 可表成

$$\gamma = k_0\gamma_0 + k_1\gamma_1 + \cdots + k_s\gamma_s,$$

其中$k_0 + k_1 + \cdots + k_s = 1$.

7. (20 分) 证明范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j),$$

其中的 $\prod$ 是连乘积的记号。等式右端表示对$a_1, a_2, \dots, a_n$这 n 个数作所有可能的差：

$$a_i-a_j (1 \le j < i \le n),$$

然后把它们连乘起来。具体写出来，就是

$$\begin{aligned}\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j) = {} & (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)\dots(a_n-a_1) \\ & \times(a_3-a_2)(a_4-a_2)\dots(a_n-a_2) \\ & \times(a_4-a_3)\dots(a_n-a_3) \\ & \times\dots \\ & \times(a_n-a_{n-1}).\end{aligned}$$

8. (20 分) 给定数域 K 上 n 维向量空间K^n内一个线性无关向量组 $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_s$，证明存在 K 上一个齐次线性方程组以此向量组为一个基础解系。

9. (20 分) 设 A 是数域 K 上的 n 阶方阵。证明：

(1)若 $A^2=I$，则

$$r(A+I)+r(A-I)=n;$$

(2)若 $A^2=A$，则

$$r(A)+r(A-I)=n.$$

10.(10 分)设 A 是数域 K 上的一个 n 阶方阵，$A^k=0$.证明：

$$(I-A)^{-1}=I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$$