中 山 大 学

2018年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：621

科目名称：一元微积分

考试时间：2017年12月24日 上午

考生须知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分!答题要写清题号，不必抄题。

(一) 填空题（每小题5分，共40分）请将答案写在答题纸上，并标明题号.

1. 设 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$，且 $f'(0)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$__________.

2. 函数 $f(x)=\operatorname{sgn}|x|$ 的间断点是__________.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{-x}=$__________.

4. 曲线 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 在点 P（2，1）的切线方程是__________.

5. 函数 $y=\ln(1-x)$ 在 $x=0$ 处带 Peano 余项的 Taylor 展开式为__________.

6. $\int_0^1 x\ln(1+x)\mathrm{d}x=$__________.

7. $\int\dfrac{1}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x=$__________.

8. 曲线 $xy=4$ 在点（2，2）的曲率半径为__________.

(二) 选择题（每题只有一个选择项正确，每小题6分，共30分）

请将答案写在答题纸上，并标明题号.

1. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 0\\ 2x, & x>0\end{cases}$，此函数在 $x=0$ 处（　　）.

   (A) 连续但不可导　　(B) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在,但函数在该点不连续

   (C) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在　　(D) 可导

2. 当 $x\to 0$ 时，$\sin 2x$ 是关于 x 的（　　）.

   (A) 同阶无穷小　　(B) 低阶无穷小

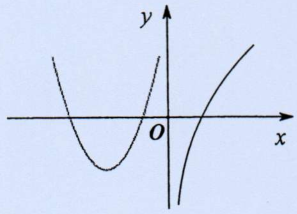
   (C) 高阶无穷小　　(D) 等价无穷小

考试完毕，试题随答题纸一起交回。

3. 假设 $f(x)$ 连续，其导函数图形如右图所示，则 $f(x)$ 具有（　　）.

(A) 两个极大值一个极小值　　(B) 两个极小值一个极大值

(C) 两个极大值两个极小值　　(D) 三个极大值一个极小值



4. 满足方程 $f'(x)=0$ 的点一定是函数 $f(x)$ 的（　　）.

(A) 极值点　　(B) 最值点

(C) 驻点　　(D) 拐点

5. 下列命题叙述正确的是（　　）.

(A) 可积函数 $f(x)$ 必存在原函数；

(B) 若 $\{x_n\}$ 是无界数列，则 $\{x_n\}$ 的任一子列都不收敛；

(C) 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处不可导，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处不存在切线；

(D) 若当 $n\to\infty$ 时 $\{x_n\}$ 是无穷大量，则 $\{x_n\}$ 的任一子列都不收敛.

(三) 计算题(每小题 10 分，共 50 分)请将答案写在答题纸上，并表明题号.

1、$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

2、求函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$ 所确定，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$ 及 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$.

3、设 $f(x)=\begin{cases} a+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & x>0 \\ b, & x=0 \\ \dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x-1}, & x<0 \end{cases}$，试问：

（1）a，b 为何值时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续？（2）$f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导？

4、求不定积分 $\int x\left(1+x^2\right)^{100}\mathrm{d}x$.

5、作出函数 $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$ 的图形.

（四）证明题(每小题 10 分，共 30 分) 请将答案写在答题纸上，并标明题号.

1. 证明不等式：$1-\dfrac{a}{b} \le \ln\dfrac{b}{a} \le \dfrac{b}{a}-1$（$0 < a \le b$）.

2．设 $x_1 > 0$，$x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n},(n=1,2,3...)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求出极限.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，证明: 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$，使得 $4f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.