中 山 大 学

2018 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：662

科目名称：数学分析

考试时间：2017 年 12 月 24 日 上 午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分!答题要写清题号，不必抄题。

共十一题，总分 150 分

一、计算题：请写出必要的计算过程。每题 9 分，共 54 分。

（1）$\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\frac{2018}{x}}$.

（2）设函数 $y=f(x)$ 在点 x 二阶可导，且 $f'(x)\neq 0$. 若 $y=f(x)$ 存在反函数 $x=f^{-1}(y)$, 试求 $(f^{-1})''(y)$.

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n})$.

（4）设 $f(x,y,z)=xy^2z^3$，其中 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2=3xyz$ 所确定，求 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}$.

（5）$\iint\limits_{\sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)dxdy$.

（6）计算 $\oint_L x^2yzdx+(x^2+y^2)dy+(x+y+1)dz$，其中 L 为曲面 $x^2+y^2+z^2=5$ 与 $z=1+x^2+y^2$ 的交线，从 oz 轴正向看为顺时针方向.

二、（10 分）讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 的敛散性.

三、（10 分）讨论函数 $f(x,y,z)=xyz$ 在约束条件: $x^2+y^2+z^2=1, x+y+z=0$ 下的最值.

四、（10 分）证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$.

五、（10 分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 都存在，证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

六、（10 分）设函数 $f(x)$ 在 (x_0-1,x_0+1) 连续，在 $(x_0-1,x_0)\cup(x_0,x_0+1)$ 上可导。又设 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=a$. 证明：$f'(x_0)$ 存在，且 $f'(x_0)=a$.

七、（10 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n$ 的收敛域.

八、（10 分）求函数 $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$ 的极值.

九、（10分）函数 $f(x)=x\sin x^{\frac{1}{4}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是否一致连续？试说明理由.

十、（10分）讨论函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\ln n}$ 在 $[0,1)$ 上的一致收敛性.

十一、（6分）设 $f:R\to R$ 连续，$f_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x+\frac{k}{n})$，证明 $f_n(x)$ 在任意区间 (a,b) 上一致收敛. 又问，$f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上也一定一致收敛吗?若否，举出反例.