中 山 大 学

2018年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：680

科目名称：数学分析(A)

考试时间：2017年12月24日上午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分!答题要写清题号，不必抄题。

1. （20分）求以下极限：

(1.1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{\sin x}$$

(1.2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin(\frac{k\pi}{n})$$

2. （20分）求以下积分：

(2.1)

$$\int_0^2\frac{1}{4+x^2}dx$$

(2.2)

$$\int x^2\cos(2x)dx$$

3. （20分）证明以下不等式：

(3.1)

$$p(x-1)<x^p-1\quad(x>1,p\geq 2).$$

(3.2)

$$\frac{\sqrt{2}}{8}<\int_0^1\frac{x^3dx}{\sqrt{1+x}}<\frac{1}{4}.$$

4. （10分）求幂级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!4^n}{n^n}x^n$的收敛半径.

5. （10分）令$|x|<1$，求级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}$的和.

6. （15分）求常数a,b使得$\cos x-\dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$当$x\to 0$时为6阶无穷小量.

7. （15分）论断“若函数$f(x)$在正半实轴非负连续且广义积分$\displaystyle\int_0^{\infty}f(x)dx$收敛，则$f(x)$有界”是否正确？若对，证明之；若不对，举出反例。

8. （15 分）证明：Riemann-Zeta 函数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$在$x\in(1,+\infty)$上连续。

9. （10 分）证明：对三维欧式空间$\mathbf{R}^3$中任一条逐段光滑简单闭曲线L，

$$\oint_L yzdx+xzdy+xydz=0.$$

10. （15 分）应用 Green 公式计算$\oint_L y^2dx+(x+y)^2dy$，其中L是平面上顶点为$(2,0),(2,2),(0,2)$的三角形，方向为正向.