中 山 大 学

2018 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：896

科目名称：高等代数(A)

考试时间：2017 年 12 月 24 日下午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分!答题要写清题号，不必抄题。

1.（10 分）在实数域中求多项式 $f(x)=x^3+x^2+2x-4$ 与 $g(x)=x^3+2x^2-4x+1$ 的最大公因式。

2.(15 分) 求解下列线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4 \\ -x_1+x_2+x_3=4 \\ 2x_1-x_2+x_3=3 \end{cases}。$$

3.（15 分）求下列非齐次线性方程组的通解

$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3-3x_4=2 \\ x_1-x_2-2x_3+3x_4=-1 \end{cases}。$$

4.（10 分）求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 的秩。

5.（15 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，判断 A 是否可逆？若可逆，求 A^{-1}。

6.（15 分）设 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，求一可逆矩阵 P, 使 $P^T AP$ 为对角形矩阵，其中 P^T 为 P 的转置。

7.（20 分）设向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ 线性无关，且 $\beta_k=\sum_{i=1}^{n} b_{ki}\alpha_i \quad (k=1,2,\ldots,n)$

考试完毕，试题随答题纸一起交回。

证明：$\{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n\}$ 线性无关的一个充要条件是 $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$。

8.（20 分） 设 σ 是数域 C 上有限维向量空间 V 的一个线性变换，如果 ξ_1，ξ_2，…，ξ_n 分别是 σ 的属于互不相同的特征值 λ_1，λ_2，…，λ_n 的特征向量，证明：ξ_1，ξ_2，…，ξ_n 线性无关。

9.（20 分） 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} x_1^2+1 & x_1x_2 & \dots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2+1 & \dots & x_2x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \dots & x_n^2+1 \end{vmatrix}$。

10（10 分） 设 A,B 是 n 维线性空间 V 的两个线性变换，证明:

$$AB\text{的秩} \geq A\text{的秩}+B\text{的秩}-n。$$