

中山大学

2018年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码: 604

科目名称: 数学二(单考)

考试时间: 2017年12月24日上午

考生须知
全部答案一律写在答题纸上, 答在试题纸上的不计分! 答题要写清题号, 不必抄题。

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos 2x$ 与 x^n 是同阶无穷小, 则 $n = ()$.

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 3.

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \geq 2 \\ x^2, & x < 2 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x=2$ 处 ()

- A. 左右导数都存在 B. 左导数不存在, 右导数存在
C. 左、右导数都不存在 D. 左导数存在, 右导数不存在

(3) 已知 $x \rightarrow 0$, $\sqrt{x+1} - \sqrt{1-\sin x} \sim ax^n$, 则 n 和 a 的值分别 ()

- A. $n=1, a=\frac{1}{2}$ B. $n=1, a=1$
C. $n=2, a=\frac{1}{4}$ D. $n=2, a=2$.

(4) 设 $\int_{-1}^1 f(x) dx = 6$, $\int_{-1}^3 f(x) dx = 4$, 则 $\int_1^3 f(x) dx = ()$

- A. 2 B. 10 C. 12 D. -2.

(5) 两个函数 $y = x+2$ 、 $y = x^2$ 在第二象限围成的面积为 ()

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{7}{6}$ C. $-\frac{1}{6}$ D. $-\frac{7}{6}$

(6) 曲线 $y = \frac{x^2}{x-1}$ 的斜渐近线方程是 ()

- A. $y = x-1$ B. $y = -x-1$ C. $y = x+1$ D. $y = 1-x$

(7) 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 下列关系一定成立的是 ()

- A. $(AB)^2 = A^2 B^2$ B. $(AB)^T = A^T B^T$
C. $|A+B| = |A| + |B|$ D. $|AB| = |BA|$.

(8) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+1 \end{bmatrix}$ 的秩为 2, 则 $a = ()$

- A. 2 B. 1 C. -1 D. -2.

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 与直线 $y=2x$ 平行的曲线 $y=e^x$ 的切线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 已知 $x^2 - xy + y^2 = 1$, $y = y(x)$ 是由该方程确定的隐函数, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 函数 $y = x + e^{-x}$ 的单调减区间是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 设矩阵 A 为三阶矩阵, 且 $|A^{-1}| = \frac{1}{2}$, 则 $|2A|$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 已知三阶矩阵 A 的特征值为 1, 2, -1, $B = A^3 - 5A^2$, 则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 15~22 小题, 共 94 分. 请将解答 (须有证明过程、演算步骤和文字说明) 写在答题纸指定位置上.

(15) (本题满分 10 分)

求 $\int \frac{x-1}{x^2+4x+5} dx$.

(16) (本题满分 10 分)

已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$.

(17) (本题满分 10 分)

求曲线 $y = \frac{1}{x}$, $y = x$ 与 $y = 2$ 轴所围成的平面图形的面积及此平面图形绕 y 轴旋转所得的旋转体的体积.

(18) (本题满分 10 分)

求微分方程 $xy' + y = x^5 + x$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = 2$ 的特解.

(19) (本题满分 12 分)

设函数 $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, 求

1) $f(x)$ 的单调区间与极值;

2) $f(x)$ 的凹向与拐点;

(20) (本题满分 12 分)

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且 $f(x) < 2$, 证明令 $3x - \int_0^x f(t) dt = 1$ 在 $[0, 1]$ 上只有一个实根.

(21) (本题满分 15 分)

求向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ 的秩和一个极大无关组, 并把其余向量用该极大无关组线性表示.

(22) (本题满分 15 分)

求非齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 11x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$$
 的通解