630

华南理工大学
2018年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

（试卷上做答无效，请在答题纸上做答，试后本卷必须与答题纸一同交回）

科目名称：量子力学

适用专业：理论物理；凝聚态物理

共 3 页

本试卷共5大题，每题30分，总分150分。

1、概念证明：

(1) 证明任意算符的平均值满足如下等式：

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{f}\rangle=\frac{i}{\hbar}\left\langle\left[\hat{H},\hat{f}\right]\right\rangle+\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\hat{f}\right\rangle.$$

(2) 若某哈密顿量 $\hat{H}$ 的所有本征态非简并，并且算符 $\hat{f}$ 满足 $\left[\hat{f},\hat{H}\right]=0$，证明 $\hat{f}$ 和 $\hat{H}$ 可以同时对角化。

2. 通常情况下，相互作用势的大小仅依赖于两粒子间的相对位置矢量 $\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$。这时，如果将变量 $\vec{r}_1,\vec{r}_2$ 代换为 $\vec{r}$ 和 $\vec{R}=(m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2)/(m_1+m_2)$（质心坐标），则薛定谔方程可以用分离变量法求解。

(1) 证明

$$\vec{r}_1=\vec{R}+(\mu/m_1)\vec{r},\vec{r}_2=\vec{R}-(\mu/m_2)\vec{r},\nabla_{r_1}=(\mu/m_2)\nabla_R+\nabla_r,\nabla_{r_2}=(\mu/m_1)\nabla_R-\nabla_r,$$

其中 $\mu=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ 是体系的约化质量；

(2) 证明（定态）薛定谔方程可以写为

$$-\frac{\hbar^2}{2(m_1+m_2)}\nabla_R^2\psi-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_r^2\psi+V(\vec{r})\psi=E\psi$$

3. 一电子处在自旋态 $|\chi\rangle=(1-2i)|\uparrow\rangle+2|\downarrow\rangle$，

(1) 确定 $|\chi\rangle$ 的归一化常数；

(2) 如果对这个电子 S_z 分量进行测量，能得到哪些可能的值？每个值的概率是多少？S_z 的期望值是什么？

(3) 如果对这个电子 S_x 分量进行测量，能得到哪些可能的值，每个值的概率是多少？S_x 的期望值是什么？

(4) 如果对这个电子 S_y 分量进行测量，能得到哪些可能的值，每个值的概率是多少？S_y 的期望值是什么？

4. 若非谐振子的哈密顿量为 $H=H_0+H'$，其中

$$H_0=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega_0^2x^2,\qquad H'=\beta x^3,（\beta \text{为小量}）$$

用微扰法计算本征能量及其波函数的一阶修正。

5. 假设粒子处于一维势场 $V(x)$ 中，

$$V(x)=\alpha\sum_{j=0}^{N-1}\delta(x-ja),\qquad \alpha>0,$$

这个势场是一系列狄拉克函数峰，称为“狄拉克梳”。

(1) 求$0 < x < a$范围内的通解。

(2) 根据布洛赫定理，由(1)的解写出区间$-a < x < 0$内的波函数。

(3) 根据边界条件，求出能量本征值所满足的代数方程。