864

华南理工大学
2018年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

（请在答题纸上做答，试卷上做答无效，试后本卷必须与答题纸一同交回）

科目名称：高等代数

适用专业：基础数学, 应用数学, 计算数学, 概率论与数理统计, 运筹学与控制论

共2页

1. (20分) 设$f(x)$, $g(x) \in P[x]$, $d(x) = (f(x), g(x))$ 且$\partial(\frac{f(x)}{d(x)}) \geq 1$, $\partial(\frac{g(x)}{d(x)}) \geq 1$, 则存在唯一的$u(x), v(x) \in P[x]$ 使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x),$$

这里$\partial(u(x)) < \partial(\frac{g(x)}{d(x)}), \partial(v(x)) < \partial(\frac{f(x)}{d(x)})$.

2. (20分) 计算n阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} + \frac{S}{a_1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} + \frac{S}{a_2} \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} + \frac{S}{a_n} \end{vmatrix},$$

这里$S = \prod_{i=1}^{n} a_i$.

3. (20分) 已知$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求A^{-1};

(2) 若$AB - A = B$, 求$B'AB^{-1}$.

4. **(20分)** 已知$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{m \times s}$，$\boldsymbol{B}$为$\boldsymbol{m \times n}$矩阵.

(1) 证明：矩阵方程$\boldsymbol{AX = B}$有解的充分必要条件是$\boldsymbol{r(A,B) = r(A)}$;

(2) 试问：矩阵方程$\boldsymbol{XA = B}$有解的充分必要条件是什么？

5. **(20分)** 设$\mathcal{A}$为数域$\boldsymbol{P}$上的线性空间$\boldsymbol{V}$的线性变换，$\boldsymbol{f(x) \in P[x]}$使得$\boldsymbol{f(\mathcal{A}) = 0}$，$\boldsymbol{f(x) = f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)}$ 且$\boldsymbol{f_1(x), f_2(x), ..., f_s(x)}$ 两两互素. 令$\boldsymbol{V_i = (f_i(\mathcal{A}))^{-1}(0), i = 1, 2, ..., s}$. 证明：$\boldsymbol{V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s}$.

6. **(15分)** 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

的解空间为$\boldsymbol{W}$，求：向量$\boldsymbol{\alpha = (2,3,4,5)}$在$\boldsymbol{W}$上的内射影以及$\boldsymbol{\alpha}$到$\boldsymbol{W}$的距离.

(注：由分解式$\boldsymbol{V = V_1 \oplus V_1^{\perp}}$，对任意$\boldsymbol{\alpha \in V}$有$\boldsymbol{\alpha = \alpha_1 + \alpha_2}$，$\boldsymbol{\alpha_1 \in V_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2 \in V_1^{\perp}}$，称$\boldsymbol{\alpha_1}$为向量$\boldsymbol{\alpha}$在子空间$\boldsymbol{V_1}$上的内射影.**)**

7. **(15分)** 设二次型$\boldsymbol{f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2ax_2x_3}$通过正交线性替换$\boldsymbol{x = Py}$化成标准型$\boldsymbol{f = 3y_1^2 + 3y_2^2 + by_3^2}$,求$\boldsymbol{a, b}$的值及正交矩阵$\boldsymbol{P}$.

8. **(20分)** 设$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{n \times n}$实矩阵，$\boldsymbol{k}$为自然数，满足$\boldsymbol{A^k = 0}$，证明：$\boldsymbol{A^n = 0}$.