

江西师范大学 2018 年硕士研究生入学考试试题 (B 卷)

科目代码: 823 科目名称: 高等数学
适用专业: 045104 学科教学(数学)

注: 考生答题时, 请写在考点下发的答题纸上, 写在本试题纸或其他答题纸上的一律无效。

(本试题共 2 页)

一、(15 分) 计算题 (每小题 5 分)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (3^n + 5^n)^{1/n}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x (1 + \sin 3t)^{1/t} dt}{x}; \quad (3) \int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin 2x dx.$$

二、(15 分) 设函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} + a, & x < 0, \\ x^2 + bx + 3, & x \geq 0. \end{cases}$$

在点 $x=0$ 处可导, 试确定常数 a, b 的值。

三、(15 分) 设函数 f 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续, 且极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 存在。证明: (1) f 在 $[a, +\infty)$ 上有界; (2) f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续。

四、(15 分) 设函数 f 在 $[0, 1]$ 上连续, 证明

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx,$$

并利用所得结果计算定积分 $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ 。

五、(15 分) 求通过直线 $\begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x - 3y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$ 并且垂直于平面

$x + 2y + 3z - 5 = 0$ 的平面方程。

六、(15 分) 设 $y = y(x)$ 是由方程 $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$ 所确定的隐函

数, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

七、(15分) 求第二型曲线积分 $\oint_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, 其中曲线 L 是半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ ($z \geq 0$) 和柱面 $x^2 + y^2 = 4x$ 的交线, 从 x 轴正向看去, L 的方向为逆时针。

八、(15分) 设 S 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 所截得的曲面, 计算曲面积分 $\iint_S (y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2) dS$.

九、(15分) 求二阶微分方程 $2y \frac{d^2y}{dx^2} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 0$ 的解。

十、(15分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} (x+1)^{n-1}$ 的收敛域, 并在收敛域中求它的和函数。