江西师范大学2017年全日制硕士研究生入学考试试题

（B卷）

专业：070100数学、071400统计学、0701Z1决策学　科目：高等代数 847

注：考生答题时，请写在考点下发的答题纸上，写在本试题纸或其他答题纸上的一律无效。

（本试题共 2 页）

一、填空题(每小题6分，共48分)

1、实数域上n级对称矩阵按合同关系分类，共有__________类.

2、设A^*是5级矩阵A的伴随矩阵，如果A的秩是4，那么线性方程组$A^*x=0$的解空间的维数是________.

3、当$a=$________，$b=$________时，x^2+2x-3是多项式x^3+ax^2+bx+3的因式.

4、如果对任意不全为零的实数x_1,x_2,x_3，不等式$x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2tx_1x_2+2tx_2x_3>0$恒成立，那么实数$t$的取值范围是__________.

5、设向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，那么当$k,l$满足______时，向量$\alpha_1+k\alpha_2,\alpha_2+l\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$也线性无关.

6、令W是数域P上所有n级对称矩阵关于矩阵通常的加法和数乘运算构成的向量空间，则W的维数是_________.

7、如果矩阵A的不变因子为$1,1,1,\lambda+1,\lambda^2-1,(\lambda+1)(\lambda-1)^2$，那么$A$的相似$Jordan$标准形是__________.

8、设实数α,β,γ满足：$\alpha=\beta+\gamma$，则行列式$\begin{vmatrix}-\alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & -\alpha & \beta \\ \beta & \gamma & -\alpha\end{vmatrix}$的值为__________.

二、（17分）计算n级行列式$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$

三、（17分）设 $A=\begin{pmatrix}1 & a_1\\ 1 & a_2\\ \vdots & \vdots\\ 1 & a_n\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}$，证明：

（Ⅰ）矩阵 BA 可逆的充分必要条件是：$(\sum_{j=1}^{n}a_j)(\sum_{j=1}^{n}b_j)\neq n\sum_{j=1}^{n}a_jb_j$.

（Ⅱ）当 $n\geq 3$ 时，AB 不可逆.

四、（17分）设 A 是 n 级可逆矩阵.

（Ⅰ）证明：A 的特征值一定不为零；

（Ⅱ）证明：如果 λ 是 A 的特征值，那么 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值.

五、（17分）设 A 是 $n\times m$ 矩阵，β_1,β_2 是给定的两个 n 维列向量，证明：

线性方程组 $Ax=\beta_1$ 与 $Ax=\beta_2$ 同时有解当且仅当 秩A = 秩B，其中 $B=(A,\beta_1,\beta_2)$ 是 $n\times(m+2)$ 矩阵.

六、（17分）设 $\mathcal{A}$ 是 n 维线性空间 V 上线性变换，$\alpha\in V$，且 $\mathcal{A}^{n-1}\alpha\neq 0$，但 $\mathcal{A}^{n}\alpha=0$，证明：

（Ⅰ）$\alpha,\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}^2\alpha,\cdots,\mathcal{A}^{n-1}\alpha$ 是 V 的一组基；

（Ⅱ）$\mathcal{A}$ 的任一非零不变子空间都包含 $\mathcal{A}^{n-1}\alpha$.

七、（17分）欧氏空间 V 中的线性变换 $\mathcal{A}$ 称为反对称的，如果对任意 $\alpha,\beta\in V$,

$$(\mathcal{A}\alpha,\beta)=-(\alpha,\mathcal{A}\beta)$$

证明：$\mathcal{A}$ 为反对称线性变换的充分必要条件是，$\mathcal{A}$ 在任意一组标准正交基下的矩阵为反对称矩阵.