

中山大学

2019年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码: 621

科目名称: 一元微积分

考试时间: 2018年12月23日上午

考生须知
全部答案一律写在答题纸上, 答在试题纸上的不计分! 答题要写清题号, 不必抄题。

一、选择题 (每小题5分, 共40分)

1. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^{95}(ax+1)^5}{(x^2+1)^{50}} = 32$, 则 a 的值为 []
A. 1 B. 2 C. 4 D. 均不对
2. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ ax + b, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 则 []
A. $a=1, b=0$ B. $a=0, b$ 为任意常数
C. $a=0, b=0$ D. $a=1, b$ 为任意常数
3. 若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$, 则 $f(x)$ 的一个原函数为 []
A. $1 + \sin x$ B. $1 - \sin x$
C. $1 + \cos x$ D. $1 - \cos x$
4. 设三次函数 $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, 若两个极值点及其对应的两个极值均为相反数, 则这个函数的图像是 []
A. 关于 y 轴对称 B. 关于原点对称
C. 关于 x 轴对称 D. 以上均错
5. 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 的充分非必要的条件为 []
A. $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n \geq N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$
B. $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| \leq \varepsilon$
C. $\exists N > 0, \forall \varepsilon > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$
D. $\forall \varepsilon > 0, A = \{n | a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\}$ 是无限集
6. 曲线 $y = \frac{x}{1-x^2}$ 的渐近线有 []
A. 1 条 B. 2 条 C. 3 条 D. 4 条
7. 设 $f(x) = 2^x + 3^x - 2$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, []
A. $f(x)$ 与 x 是等价无穷小量 B. $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小量
C. $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小量 D. $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小量

8. 设函数 $f(x) = |x - 1|$, 则

[]

- A. $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续可导
C. $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续

- B. $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续
D. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续可导

二、填空题 (每小题 5 分 , 共 30 分)

1. 设 $y = 3x^4 e^{10}$, 则 $y^{(3)} =$ _____ . 2. $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx =$ _____ .
3. 已知 $f'(3) = 4$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{2h} =$ _____ .
4. 过点 $(\frac{3}{2}, 0)$ 与曲线 $y = \frac{1}{x^2}$ 相切的直线方程 _____ .
5. 设 $x_1 = 10$, $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ ($n=1, 2, \dots$), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$ _____ .
6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2x, & x > 1 \\ x + 1, & x \leq 1 \end{cases}$, 则 $\int f(x) dx =$ _____ .

三、计算题 (每小题 8 分 , 共 40 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{\sqrt{1-x} - \cos \sqrt{x}}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x (1+t^2) e^{t^2-x^2} dt$ 3. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}} dx$
4. $\int \frac{dx}{e^x(1+e^{2x})}$ 5. $\int \frac{x^3 dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

四、证明题 (每小题 15 分 , 共计 30 分)

1. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, $f'_+(a) \cdot f'_-(b) < 0$, 证明: 存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.
2. 函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减, 证明: 对于任意 $\alpha \in (0, 1)$, 有: $\int_0^\alpha f(x) dx \geq \alpha \int_0^1 f(x) dx$

五、解答题 (每小题 10 分 , 共 10 分):

做一个圆柱形无盖铁桶, 容积一定, 设为 V_0 , 问铁桶的底半径与高的比例应为多少, 才能最省铁皮?