中 山 大 学

2019 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：432

科目名称：统计学

考试时间：2018 年 12 月 23 日 下 午

考 生 须 知
全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分!答题要写清题号，不必抄题。

一、（每小题 3 分，共 60 分）单项选择题。

1．将一个骰子独立地掷两次。引进事件：$A_1 = \{$掷第一次出现奇数点$\}$，$A_2 = \{$掷第二次出现偶数点$\}$，$A_3 = \{$奇数点、偶数点各出现一次$\}$，$A_4 = \{$奇数点出现两次$\}$，则（）

（A）A_1, A_2, A_3两两独立　　（B）A_1, A_2, A_3相互独立

（C）A_2, A_3, A_4两两独立　　（D）A_2, A_3, A_4相互独立

2. 下面的说法哪个是错误的？（）

（A）$P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1$　　（B）$|P(AB) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$

（C）$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$　　（D）两个随机变量不相关不可能推出两个随机变量独立

3. 某领导有 3 个顾问，假定每个顾问贡献正确意见的概率是 0.5。现为某事可行与否而个别征求各顾问意见，并按多数人的意见做出决策，则做出正确决策的概率是（）

（A） 0.5　　（B） 0.6　　（C） 2/3　　（D） 0.7

4. 甲、乙两人轮流射击，先击中目标者获胜。甲、乙击中目标的概率分别是1/3和1/2，甲先射，甲获胜的概率是（）

（A） 1/3　　（B） 1/2　　（C） 2/3　　（D） 3/4

5. 从数 1、2、3、4 中任取一个数，记为X；再从$1, \ldots, X$中任取一个数，记为Y，则$P(Y = 3)$和$P(X = 3|Y = 3)$分别等于（）

（A） 1/4和1/3　　（B） 1/4和3/8　　（C） 7/48和4/7　　（D） 1/3和4/7

6. 若随机变量X服从$N(a, \sigma^2)$，则$E|X - a|$等于（）

（A） $\sqrt{2/\pi}\sigma$　　（B）$\sigma/2$　　（C） σ　　（D） 2σ

7. 随机变量X的密度函数为$f(x) = 2e^{-2x}$，$x > 0$。令$Y = \min(X,4)$，则$P(Y = 4)$等于（）

（A） e^{-2}　　（B）e^{-4}　　（C） e^{-8}　　（D） $1 - e^{-4}$

8. 下面关于方差的叙述中，不正确的是（）

（A）若η_1与η_2独立，则$D(\eta_1 + \eta_2) = D(\eta_1) + D(\eta_2)$

（B）若$D(\eta_1 + \eta_2) = D(\eta_1) + D(\eta_2)$，则$\eta_1$与$\eta_2$不相关

（C）当$\varepsilon > 0$时，$P\{|\eta - E\eta| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(\eta)}{\varepsilon}$

（D）当$D(\eta) = 0$时，$P\{\eta = E\eta\} = 1$

9. 设随机变量X与Y相互独立，且都服从区间$[0,1]$上的均匀分布，则（）

（A）$Z = X + Y$服从$[0,2]$上的均匀分布

（B）$Z = X - Y$服从$[-1,1]$上的均匀分布

（C）$Z = \max\{X, Y\}$服从$[0,1]$上的均匀分布

（D）(X, Y)服从区域$\{(x,y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$上的均匀分布

10. 一本书在交付印刷前，作家和出版社先后对其进行校正。该书有 300 页，每页的错误数相互独立且都服从参数为 6 的泊松分布。在作家的校对过程中，每个错误相互独立地以概率 0.8 被订正。在出版社进行的第二次校正中，前一稿的打印错误相互独立地以概率 0.9 被订正。出版后整本书的错误数大于等于 30 的概率（用标准正态分布函数$\Phi(x)$表示）大约是（）

（A） $\Phi(1)$　　（B）$\Phi(1.5)$　　（C） $\Phi(2)$　　（D） $2 - \Phi(2)$

11. 设$X_1, \ldots, X_n$为总体X的简单随机样本。若EX存在并记为μ，$\bar{X}$为样本均值，则（）

（A）$\bar{X}$是μ的相合（consistent）估计量　　（B）$\bar{X}$是μ的最大似然估计量

（C）$\bar{X}$是μ的充分统计量　　（D）$|\bar{X}|$是$|\mu|$的无偏估计量

12. 设$X_1, \ldots, X_n$为标准正态分布$N(0,1)$的简单随机样本。记$T_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$，$T_2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$，则（）

（A）$\frac{T_2/(n-1)}{T_1/n} \sim F(n-1, n)$　　（B）$\frac{T_2/(n-1)}{T_1/n} \sim \mathrm{Beta}(n-1, n)$

（C）$\frac{T_2}{T_1} \sim \mathrm{Beta}(n-1, n)$　　（D）$\frac{T_2}{T_1} \sim \mathrm{Beta}(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2})$

13. 设$X_1, \ldots, X_n$为正态分布$N(0, \sigma^2)$的简单随机样本。记$T_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$，$T_2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$，则（）

（A）T_1和T_2相互独立　　（B）T_1和$T_1 - T_2$相互独立

（C）T_1和T_1/T_2相互独立　　（D）$T_1 + T_2$和$T_1 - T_2$相互独立

14. 设$X_1,\dots,X_n$为泊松分布 Poisson(λ)的简单随机样本，$\bar{X}$和$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$为样本均值及样本方差。令$Z$为服从标准正态分布的随机变量，则当$n\to+\infty$时，()

（A）$\frac{\sqrt{n}\bar{X}}{S}$依分布收敛到$Z$　　（B）$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\lambda)}{\bar{X}/S}$依分布收敛到$Z$

（C）$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\lambda)}{\lambda}$依分布收敛到$Z$　　（D）$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\lambda)}{\bar{X}}$依分布收敛到$Z$

15. 设$X_1,\dots,X_n$为正态分布$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，其中μ已知而σ^2未知，则下列不是统计量的是()

（A）$\sum_{i=1}^{n}X_i/\sigma$　　（B）X_1　　（C）$\sum_{i=1}^{n}X_i^2/n$　　（D）$\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu$

16. 设$X_1,\dots,X_n$为均匀分布$\mathrm{U}(0,\theta)$的简单随机样本，则θ的最大似然估计量为()

（A）$X_{(1)}$　　（B）$\bar{X}$　　（C）$X_{(n)}$　　（D）$X_1,\cdots,X_n$的中位数

17. 下列关于统计学常用的分布的判断中，错误的是()

（A）若$Z\sim\mathrm{F}(n_1,n_2)$，则$1/Z\sim\mathrm{F}(n_2,n_1)$

（B）若$T\sim t(n)$，则$T^2\sim\mathrm{F}(1,n)$

（C）若$X\sim\mathrm{N}(0,1)$，则$X^2\sim\chi^2(1)$

（D）若$X\sim\mathrm{N}(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，则$X/Y\sim t(n)$

18. 设$X_1,\dots,X_n$为正态分布$\mathrm{N}(\mu,1)$的简单样本，则μ的双侧 95%置信区间为()

（A）$\left(\bar{X}-\frac{1.64}{\sqrt{n}},\bar{X}+\frac{1.64}{\sqrt{n}}\right)$　　（B）$\left(\bar{X}-\frac{1.64}{\sqrt{n}},\bar{X}+\frac{1.96}{\sqrt{n}}\right)$

（C）$\left(\bar{X}-\frac{1.96}{\sqrt{n}},\bar{X}+\frac{1.64}{\sqrt{n}}\right)$　　（D）$\left(\bar{X}-\frac{1.96}{\sqrt{n}},\bar{X}+\frac{1.96}{\sqrt{n}}\right)$

19. 假设其他条件不变，把置信度α从2.5%升到5%，则总体均值μ的置信程度为$1-\alpha$的置信区间的宽度将()

（A）变长　　（B）不变　　（C）变短　　（D）可能变长，也可能变短

20. 设$X_1,\dots,X_n$为正态分布$\mathrm{N}(\mu_1,\sigma^2)$的简单随机样本，$Y_1,\dots,Y_n$为正态分布$\mathrm{N}(\mu_2,\sigma^2)$的简单随机样本。若采用方差分析检验：$\mathrm{H}_0:\mu_1=\mu_2$，$\mathrm{H}_1:\mu_1\neq\mu_2$，检验统计量为$F=\frac{\mathrm{MSB}}{\mathrm{MSW}}$，其中组间方差MSB为()

（A）$\frac{n(\bar{X}-\bar{Y})^2}{2}$　　（B）$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})^2}{2}$　　（C）$(\bar{X}-\bar{Y})^2$　　（D）$\frac{\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\bar{X})^2+(Y_i-\bar{Y})^2]}{2n-2}$

二、(22 分) 已知样本空间$\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$, $P(\{\omega_1\})=\frac{1}{3}$, $P(\{\omega_2\})=\frac{2}{3}$。随机变量$\xi(\omega_1)=0$, $\xi(\omega_2)=1$; 随机变量$\eta(\omega_1)=2$, $\eta(\omega_2)=1$。

(1)(6 分)写出(ξ,η)联合分布律。

(2)(6 分)求随机变量ξ, η相关系数。

(3)(4 分)写出随机变量ξ和η的关系。

(4)(6 分)求$\xi-\eta$和$\xi\cdot\eta$的概率分布。

三、(26 分) 设总体X密度函数为$f(x;\theta)=e^{-(x-\theta)}$, $x\geq\theta$, 其中$\theta\in(-\infty,+\infty)$为未知参数。$X_1,X_2,\dots,X_n$为取自该总体的简单随机样本。

(1)(6 分)求θ的矩法估计量$\hat{\theta}_1$。

(2)(10 分)求θ的最大似然法估计量$\hat{\theta}_2$; 并求该总体分布的中位数的最大似然估计量。

(3)(10 分)基于$\hat{\theta}_2$的分布, 构造θ的一个置信水平为95%的置信区间。

四、(18 分) 设$X_1,\dots,X_n$为伯努利分布Bernoulli(p)的简单随机样本, $P(X_i=1)=p$, $P(X_i=0)=1-p$。

(1)(8 分)求p的 Fisher 信息$I(p)$。

(2)(10 分)证明: $\frac{n}{n-1}\bar{X}(1-\bar{X})$是$p(1-p)$最优无偏估计量。

五、(24 分) 设$X_1,\dots,X_5$为来自正态分布$N(0,\theta)$的简单随机样本, $Y_1,\dots,Y_5$为来自正态分布$N(1,\theta)$的简单随机样本。$\theta>0$为未知参数。令$T=\sum_{i=1}^{5}[X_i^2+(Y_i-1)^2]$。

(1)(8 分)证明: T是θ的充分统计量。

(2)(10分)给定显著性水平$\alpha=0.05$, 针对假设$H_0:\theta=1$, $H_1:\theta\neq1$构建似然比检验。(注: 拒绝域的界值用分布的分位数表示即可)

(3)(6 分)写出上述检验的势(功效)函数(power function)。