

中山大学

2019年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码: 604

科目名称: 高等数学(单考)

考试时间: 2018年12月23日上午

考生须知

全部答案一律写在答题纸上, 答在试题纸上的不计分! 答题要写清题号, 不必抄题。

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设 $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \geq 1 \\ x^2, & x < 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处 ()

- A. 左右导数都存在 B. 左导数存在, 右导数不存在
C. 左导数不存在, 右导数存在 D. 左、右导数都不存在.

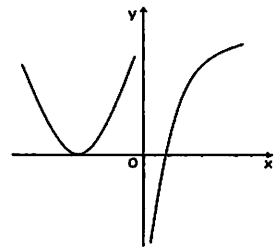
(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其中二阶导数 $f''(x)$ 的图形

如图所示, 则曲线 $y=f(x)$ 的拐点的个数为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

(3) 已知 $x \rightarrow 0$, $\sqrt{x+1} - \sqrt{1-\sin x} \sim ax^n$, 则 n 和 a 的值分别 ()

- A. $n=1, a=1$ B. $n=1, a=\frac{1}{2}$
C. $n=2, a=\frac{1}{4}$ D. $n=2, a=2$.



(4) 设 $\int_{-2}^1 f(x) dx = 5$, $\int_{-2}^3 f(x) dx = 3$, 则 $\int_1^3 f(x) dx = ()$

- A. 2 B. 8 C. 10 D. -2.

(5) 下列曲线有渐近线的是 ()

- A. $y = x + \sin x$ B. $y = x^2 + \sin x$ C. $y = x + \sin \frac{1}{x}$ D. $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

(6) 设 $z = yf(xy)$, 其中函数 f 可微, 则 $\frac{1}{y^2} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = ()$

- A. $-xyf'(xy)$ B. $xyf'(xy)$ C. $-xf'(xy)$ D. $xf'(xy)$.

(7) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组中线性无关的是 ()

- A. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 + \alpha_1$
C. $\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_1 - 3\alpha_2$ D. $\alpha_2, \alpha_3, 2\alpha_2 + \alpha_3$.

(8) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & a+1 \end{bmatrix}$ 的所有特征值之积为 1, 则 $a = ()$

- A. -2 B. 0 C. 2 D. 4.

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 函数 $f(x) = \sqrt{2 + \ln^2 x}$, 则 $f'(e) =$ _____.

(10) $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx =$ _____.

(11) 两个函数 $y = x + 2$ 、 $y = x^2$ 在第一象限围成的面积为_____.

(12) 函数 $y = x \ln x$ 的单调增区间是_____.

(13) 设方阵 A 满足 $A^2 + A - 5E = O$, 则 $(A + 2E)^{-1} =$ _____.

(14) 已知 A 为三阶矩阵, 且满足 $|A| = 2$, 则 $|2A^{-1}| =$ _____.

三、解答题: 15~22 小题,共 94 分.请将解答(须有证明过程、演算步骤和文字说明)写在答题纸指定位置上.

(15) (本题满分 10 分)

用洛必达法则求下列函数的极限:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3}$.

(16) (本题满分 10 分)

函数 $y = y(x)$ 由方程 $ye^x + \ln y = 1$ 确定, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0, y=1}$, $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0, y=1}$

(17) (本题满分 10 分)

已知曲线 $C_1: y = \frac{\sqrt{x}}{e}$ 与曲线 $C_2: y = \ln \sqrt{x}$ 在点 (x_0, y_0) 处有公共切线,

1) 求两曲线与 x 轴所围平面图形的面积;

2) 求上述平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

(18) (本题满分 10 分)

求微分方程 $xy' + y = x^5 + x$ 满足初始条件 $y|_{x=-1} = -\frac{1}{6}$ 的特解.

(19) (本题满分 12 分)

求函数 $y(x) = \int_0^x (6t^2 - 18t + 12)dt$ 在 $x \in [0, 3]$ 上的单调区间, 拐点以及最值.

(20) (本题满分 12 分)

已知 $\sin \sqrt{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 证明: $\int x f'(x) dx = \frac{\sqrt{x}}{2} \cos \sqrt{x} - \sin \sqrt{x} + C$.

(21) (本题满分 15 分)

求向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ 的秩和一个极大无关组, 并把其余向量用该极大无关组线性表示.

(22) (本题满分 15 分)

求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 11x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$ 的通解.