2025 考研数学（一） 真题

试卷及解析

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1．已知函数 $f\left(x\right)=\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\sin t\mathrm{d}t$ ， $g\left(x\right)=\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\bullet\sin^2 x$，则

A． $x=0$ 是 $f\left(x\right)$ 的极值点，也是 $g\left(x\right)$ 的极值点．

B． $x=0$ 是 $f\left(x\right)$ 的极值点，$\left(0,0\right)$ 是曲线 $y=g\left(x\right)$ 的拐点．

C． $x=0$ 是 $f\left(x\right)$ 的极值点，$\left(0,0\right)$ 是曲线 $y=f\left(x\right)$ 的拐点．

D． $\left(0,0\right)$ 是曲线 $y=f\left(x\right)$ 的拐点，$\left(0,0\right)$ 也是曲线 $y=g\left(x\right)$ 的拐点．

【答案】B

【解析】

$f^{'}(x)=e^{x^2}\sin x, f^{''}(x)=2xe^{x^2}\sin x+e^{x^2}\cos x$

$f^{'}(0)=0, f^{''}(0)=1>0$.

$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点.

$g^{'}(x)=e^{x^2}\sin^2 x+\sin 2x\int_0^x e^{t^2}dt$,

$g^{''}(x)=e^{x^2}\sin 2x+2xe^{x^2}\sin^2 x+\sin 2xe^{x^2}+2\cos 2x\int_0^x e^{t^2}dt$

$g^{'}(0)=0,\quad g^{''}(0)=0,\quad g^{'''}(0)>0$.

$(0,0)$ 是 $y=g(x)$ 的拐点.

2．已知级数：①$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}$；②$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}-\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$，则

A．①与②均条件收敛．

B．①条件收敛，②绝对收敛．

C．①绝对收敛，②条件收敛．　　　　　　　　D．①与②均绝对收敛．

【答案】B

【解析】

$$\left|\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}\right|=\left|\sin\left(\frac{n^3\pi}{n^2+1}-n\pi\right)\right|=\left|\sin\frac{n}{n^2+1}\pi\right|\sim\frac{n}{n^2+1}\pi\sim\frac{1}{n}\pi.$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散 $\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}$不是绝对收敛.

$\sin\frac{(n^3\pi)}{n+1}=(-1)^n\sin\left(\frac{n^3\pi}{n^2+1}-n\pi\right)=(-1)^n\sin\frac{n}{n^2+1}\pi$，为交错级数.

$sin\frac{n}{n^2+1}\pi$递减，$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}$条件收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt[2]{n^3}}-\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right).$$

$$|(-1)^n|\frac{1}{\sqrt[2]{n^3}}-\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\Big)\Big|=\left|-\frac{1}{3}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|.$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt[2]{n^3}}-\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$ 绝对收敛.

3．设函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上可导，则

A．当$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在时，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在.

B．当$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在时，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在.

C．当$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$存在时，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在.

D．当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$ 存在时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t}{x}$ 存在.

【答案】D

【解析】A 错误，反例：

$$f(x)=\frac{\sin x^2}{x}, \lim_{x\to+\infty} f(x)=0, \text{但} \lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2\cos x^2-\sin x^2}{x^2}, \text{极限不存在.}$$

B 错误，反例：$f(x)=\sqrt{x}, f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0,$ 极限存在，但 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 极限不存在.

C 错误，反例：

$$f(x)=\cos x, \text{则} \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} \text{存在，但} \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\cos x \text{不存在.}$$

D 正确，用 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{1}=\mathrm{A}$，故选 D .

4．设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_{-2}^{2}\mathrm{d}x\int_{4-x^2}^{4} f\left(x,y\right)\mathrm{d}y=$

A．$\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f\left(x,y\right)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{4-y}}^{2} f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$.

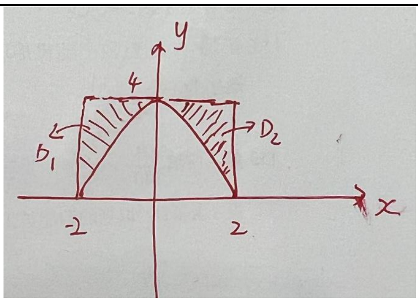
B．$\int_0^4\left[\int_{-2}^{\sqrt{4-y}} f\left(x,y\right)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{4-y}}^{2} f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$.

C．$\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f\left(x,y\right)\mathrm{d}x+\int_{2}^{\sqrt{4-y}} f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$.

D．$2\int_0^4\mathrm{d}y\int_{\sqrt{4-y}}^{2} f\left(x,y\right)\mathrm{d}x$.

【答案】A

【解析】由题易知，此二重积分积分区域为



$\mathrm{D}=\left\{(x,y)\middle|4-x^2\le y\le 4,-2\le x\le 2\right\}$，对应图像为上图所示。

记 $\mathrm{D}_1=\left\{(x,y)\middle|4-x^2\le y\le 4,-2\le x\le 0\right\}$， $\mathrm{D}_2=\left\{(x,y)\middle|4-x^2\le y\le 4,0\le x\le 2\right\}$，且

$\mathrm{I}=\int_{-2}^{2}\mathrm{d}x\int_{4-x^2}^{4}f(x,y)\mathrm{d}y$，则 $\mathrm{I}=\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，交换积分次序得

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&=\int_0^4\mathrm{d}y\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_0^4\mathrm{d}y\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x\\&=\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\end{aligned}$$

故 A 正确。

5．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3$ 的正惯性指数

A．0．　　　　B．1．

C．2．　　　　D．3．

【答案】B

【解析】

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda&0\\-1&0&\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\lambda-1&-1&-1\\0&\lambda&-\lambda\\-1&0&\lambda\end{pmatrix}\to\lambda\begin{pmatrix}\lambda-1&-1&-1\\0&1&-1\\-1&0&\lambda\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=\lambda\left[\lambda(\lambda-1)-1-1\right]\\&=\lambda(\lambda^2-\lambda-2)\\&=\lambda(\lambda-2)(\lambda+1)\end{aligned}$$

解得

$$\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=-1$$

故正惯性指数为 1，选 B.

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 n 维列向量，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，且 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，关于 x,y,z 的方程组 $x\boldsymbol{\alpha}_1+y\boldsymbol{\alpha}_2+z\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_4$ 的几何图形是

A．过原点的一个平面.
B．过原点的一条直线.
C．不过原点的一个平面.
D．不过原点的一条直线.

【答案】D

【解析】记 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$，由 α_1,α_2 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，可得 $r\left(A\right)=2$。记 $\overline{A}=\left(A\middle|\alpha_4\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)$，再由 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4=0$，则 $r\left(\overline{A}\right)=2$。于是 $Ax=\alpha_4$ 有无穷多解。则 $x\alpha_1+y\alpha_2+z\alpha_3=\alpha_4$ 等价于 $\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\cdot\left(x,y,z\right)^{\mathrm{T}}=\alpha_4$，即 $A\cdot\left(x,y,z\right)^{\mathrm{T}}=\alpha_4$。

若过原点，则 $\alpha_4=0$ 与 α_1,α_2 线性无关矛盾，故不过原点。

$$x\alpha_1+y\alpha_2+z\alpha_3=\alpha_4\Leftrightarrow\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=a_{14}\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=a_{24}\\\qquad\cdots\\a_{n1}x+a_{n2}y+a_{n3}z=a_{n4}\end{cases}$$

，由上述分析可知 $r\left(A\right)=r\left(\overline{A}\right)=2$，故两平面交于一条直线，且不过原点。故选 D。

7. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足 $r\left(\boldsymbol{A}\right)+r\left(\boldsymbol{B}\right)+r\left(\boldsymbol{C}\right)=r\left(\boldsymbol{ABC}\right)+2n$，给出下列四个结论:

①$r\left(\boldsymbol{ABC}\right)+n=r\left(\boldsymbol{AB}\right)+r\left(\boldsymbol{C}\right)$;

②$r\left(\boldsymbol{AB}\right)+n=r\left(\boldsymbol{A}\right)+r\left(\boldsymbol{B}\right)$;

③$r\left(\boldsymbol{A}\right)=r\left(\boldsymbol{B}\right)=r\left(\boldsymbol{C}\right)=n$;

④$r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{BC})=n$.

其中正确结论的序号是

A．①②．　　　　B．①③．

C．②④．　　　　D．③④．

【答案】A

【解析】$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$，满足 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})+r(\boldsymbol{C})=r(\boldsymbol{ABC})+2n$，则 $r(\boldsymbol{A})=1,r(\boldsymbol{B})=1,r(\boldsymbol{C})=2$，排除结论③④，故选 A.

8．设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(0,0;1,1;\rho)$，其中 $\rho\in(-1,1)$.若 a,b 为满足 $a^2+b^2=1$ 的任意实数，则 $D(aX+bY)$ 的最大值为

A．1．　　　　B．2．

C．$1+|\rho|$．　　　　D．$1+\rho^2$．

【答案】C

【解析】

$D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY+2ab\rho\cdot1\cdot1$

$=a^2+b^2+2ab\rho=1+2ab\rho=1+2a\sqrt{1-a^2}\rho=f(a)$

$f'(a)=\rho\left(2\sqrt{1-a^2}+2a\cdot\dfrac{-a}{\sqrt{1-a^2}}\right)=2\rho\left(\sqrt{1-a^2}-\dfrac{a^2}{\sqrt{1-a^2}}\right)=0$

即 $2\rho\cdot\dfrac{1-a^2-a^2}{\sqrt{1-a^2}}=0$，$2a^2=1\Rightarrow a^2=\dfrac{1}{2},b^2=\dfrac{1}{2}$，于是 $a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},b=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。所以最大值为 $1+|\rho|$，故选 C。

9．设 $X_1,X_2,\cdots,X_{20}$ 是来自总体 $B(1,0.1)$ 的简单随机样本.令 $T=\sum\limits_{i=1}^{20}X_i$，利用泊松分布近似表示二项分布的方法可得 $P\{T\leq1\}\approx$

A. $\dfrac{1}{e^2}$.

B. $\dfrac{2}{e^2}$.

C. $\dfrac{3}{e^2}$.

D. $\dfrac{4}{e^2}$.

【答案】C

【解析】由题意可知$T \sim B(20,0.1).np = 20\times 0.1 = 2$

$$P\{T\leqslant 1\} = P\{T=0\} + P\{T=1\} = \frac{2^0}{0!}e^{-2} + \frac{2^1}{1!}e^{-2} = e^{-2} + 2e^{-2} = \frac{3}{e^2}$$

10. 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自正态总体$N\left(\mu, 2\right)$的简单随机样本.记$\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，$Z_\alpha$表示标准正态分布的上侧$\alpha$分位数.假设检验问题：$H_0$：$\mu\leqslant 1$，$H_1$：$\mu > 1$的显著性水平为$\alpha$的检验的拒绝域为

A. $\left\{\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right) \middle| \overline{X} > 1 + \dfrac{2}{n} Z_\alpha \right\}$.

B. $\left\{\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right) \middle| \overline{X} > 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{n} Z_\alpha \right\}$.

C. $\left\{\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right) \middle| \overline{X} > 1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}} Z_\alpha \right\}$.

D. $\left\{\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right) \middle| \overline{X} > 1 + \sqrt{\dfrac{2}{n}} Z_\alpha \right\}$.

【答案】D

【解析】$\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} > z_\alpha \Rightarrow \overline{X} > \sqrt{\dfrac{2}{n}} z_\alpha + 1$，故选 D

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^x - 1}{\ln x \cdot \ln(1-x)} =$______.

【答案】-1

【解析】

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x\ln x}-1}{-x\ln x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\ln x}{-x\ln x}=-1$$

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<\frac{1}{2},\\ x^2, & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$ 的傅里叶级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$, $S(x)$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$ 的和函数，则 $S\left(-\frac{7}{2}\right)=$______.

【答案】$\frac{1}{8}$

【解析】

$$s\left(-\frac{7}{2}\right)=s\left(-\frac{7}{2}+4\right)=s\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}.$$

13. 已知函数 $u(x,y,z)=xy^2z^3$, 向量 $\boldsymbol{n}=(2,2,-1)$, 则 $\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,1,1)}=$______.

【答案】 1

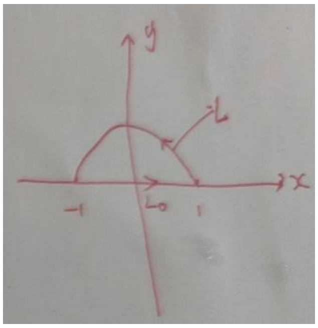
【解析】由题易知，$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2z^3,\frac{\partial u}{\partial y}=2xyz^3,\frac{\partial u}{\partial z}=3xy^2z^2$

则在 $x=1,y=1,z=1$ 处有 $\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=(1,2,3)$

对于向量 $\vec{n}=(2,2,-1)$，归一化可得 $\vec{n}_0=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$

故 $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{(1,1,1)}=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\vec{n}_0=(1,2,3)\cdot\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)=1\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{2}{3}+3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=1$

14. 已知有向曲线 L 是沿抛物线 $y=1-x^2$ 从点 $(1,0)$ 到点 $(-1,0)$ 的一段，则曲线积分 $\int_L (y+\cos x)\mathrm{d}x+(2x+\cos y)\mathrm{d}y=$ ______.



【答案】 $\frac{4}{3}-2\sin 1$

【解析】由题易知可作曲线如右图所示.

记 L_0 是从 $x=-1$ 到 $x=1$ 的直线,

并记曲线积 $I=\int_L (y+\cos x)dx+(2x+\cos y)dy$

则在 L_0 与 L 所围的封闭区域可用格林公式

即 $I_1=\oint\limits_{L_0+L}(y+\cos x)dx+(2x+\cos y)dy$

$=\iint\limits_D 2-1d\sigma=\int_{-1}^1 dx\int_0^{1-x^2}dy=\int_{-1}^1(1-x^2)dx=\frac{4}{3}$

又 $I_2=\int\limits_{L_0}(y+\cos x)dx+(2x+\cos y)dy=\int_{-1}^1\cos xdx=2\sin 1$,故 $I=\frac{4}{3}-2\sin 1$

15. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&-3\\a&3&-4\\b&5&-7\end{pmatrix}$, 若方程组 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 不同解，则 $a-b=$ ______.

【答案】-4

【解析】由题知，$A=\begin{pmatrix}4&2&-3\\a&3&-4\\b&5&-7\end{pmatrix}$，若 $A^2x=0$ 与 $Ax=0$ 同解，则三秩相同，即

$r(A)=r(A^2)=r\begin{pmatrix}A\\A^2\end{pmatrix}$。如果 A 可逆，三秩显然相同，则 $A^2x=0$ 与 $Ax=0$ 同解，于是要想 $A^2x=0$ 与 $Ax=0$ 不同解，即 A 不可逆，于是 $|A|=0$。根据行列式的倍加性质易得

$$|A|=\left|\begin{pmatrix}4&2&-3\\a&3&-4\\b&5&-7\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}4&2&-1\\a&3&-1\\b&5&-2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}4&0&-1\\a&1&-1\\b&1&-2\end{pmatrix}\right|=4(-2+1)-(a-b)$$ ，令 $|A|=0$，

有 $a-b=-4$。

16. 设 A,B 为两个随机事件，且 A 与 B 相互独立，已知 $P(A)=2P(B),P(A\cup B)=\frac{5}{8}$, 则在事件 A,B 至少有一个发生的条件下，A,B 中恰有一个发生的概率为______.

【答案】 $\frac{4}{5}$

【解析】$P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)$

$=P(A)+P(B)-2P(A)P(B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{5}{8}$，$\Rightarrow 3P(B)-2P^2(B)=\frac{5}{8}$

$24P(B)-16P^2(B)=5,16P^2(B)-24P(B)+5=0$

$\Rightarrow (4P(B)-1)(4P(B)-5)=0$

$P(B)=\frac{1}{4},P(A)=\frac{1}{2}$

$P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-2P(A)P(B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-2\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$P=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}}=\frac{1}{2}\times\frac{8}{5}=\frac{4}{5}$

三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（本题满分 10 分）

计算 $\int_0^1\frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)}\mathrm{d}x.$

17．解：

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\left(x^2-2x+2\right)}dx=\int_0^1\left(\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+2}\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{\frac{1}{5}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{3}{5}}{x^2-2x+2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{5}\ln|1+x|\Big|_0^1-\frac{1}{10}\ln\left|x^2-2x+2\right|\Big|_0^1+\frac{2}{5}\arctan(x-1)\Big|_0^1=\frac{3}{0}\ln 2+\frac{1}{10}\pi .$$

18.（本题满分 10 分）

已知函数 $f(u)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内具有 2 阶导数，记 $g(x,y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$, 若 $g(x,y)$ 满足

$x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1$, 且 $g(x,y)=1,\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(x,x)}=\frac{2}{x}$, 求 $f(u)$.

解：

令 $u=\frac{x}{y}$, 则 $\frac{\partial g}{\partial x}=f'(u)\frac{1}{y},\frac{\partial g}{\partial y}=f'(u)\left(-\frac{x}{y^2}\right)$

又 $g(x,x)=f\left(\frac{x}{x}\right)=f(1)=1$，$\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(x,x)}=f'(1)\frac{1}{x}=\frac{2}{x}$, 故 $f'(1)=2$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\left(f''(u)\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y}=f''(u)\frac{1}{y^2}\ ......(1)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=f''(u)\left(-\frac{x}{y^2}\right)\frac{1}{y}+f'(u)\left(-\frac{1}{y^2}\right)=-\frac{x}{y^3}f''(u)-\frac{1}{y^2}f'(u)\ ..(2)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=f''(u)\left(-\frac{x}{y^2}\right)\frac{x}{y}+f'(u)\left(\frac{2x}{y^2}\right)=\frac{x^2}{y^4}f''(u)+\frac{2x}{y^3}f'(u)\ ...(3)$$

将（1）（2）（3）代入$x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1$化简得：

$u^2f''(u)+uf'(u)=1$，即 $f''(u)+\frac{1}{u^2}f'(u)=\frac{1}{u^2}$ 。

令$p'=f'(u)$则$p''+\frac{1}{u}p'=\frac{1}{u^2}$

$$p=e^{-\int\frac{1}{u}du}\left[\int\frac{1}{u^2}e^{\int\frac{1}{u}du}du+C\right]=\frac{1}{u}\left[\int\frac{1}{u}du+C\right]=\frac{\ln u}{u}+\frac{C}{u}$$

又 $p'\big|_{u=1}=C=2$，故 $p=\frac{\ln u}{u}+\frac{2}{u}$

因此，$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\ln u}{u}+\frac{2}{u}$，积分得 $f(u)=\int\left(\frac{\ln u}{u}+\frac{2}{u}\right)du=\frac{1}{2}\ln^2 u+2\ln u+C$ ，

又 $f(1)=C=1$，故 $f(u)=\frac{1}{2}\ln^2 u+2\ln u+1$ 。

19.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导.证明导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单调增加的充分必要条件是:对 (a,b) 内任意的 x_1,x_2,x_3,当 $x_1<x_2<x_3$ 时 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

解：充分性：若对 (a,b) 内任意的 x_1,x_2,x_3，当 $x_1<x_2<x_3$ 时，都有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

则在(a,b)内取任意的$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$，有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} < \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3} < \frac{f(x_5)-f(x_4)}{x_5-x_4}$$

在$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$两边同时令$x_2 \to x_1^{+}$，得

$f_+'(x_1) \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$，两边同时令$x_2 \to x_3^{-}$，得$\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le f_-'(x_3)$，即

$f_+'(x_1) \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le f_-'(x_3)$，同理可得$f_+'(x_3) \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le f_-'(x_5)$.因为

$\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} < \frac{f(x_5)-f(x_3)}{x_5-x_3}$,所以$f_+'(x_1) \le f_-'(x_5)$.由$x_1, x_5$的任意性,可得$f'(x)$在$(a,b)$内严格单调递增，充分性得证。

再证必要性,即已知$f'(x)$单调递增,在$[x_1,x_2],[x_2,x_3]$上分别使用拉格朗日中值定理,

知存在$\xi_1 \in (x_1,x_2), \xi_2 \in (x_2,x_3)$，使

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}，\quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2},$$

又由$f'(x)$单调递增，且$\xi_1 < \xi_2$知，$f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$，即

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$，必要性得证。

综上所述，充要条件得证。

20.（本题满分 10 分）

设 $\varSigma$ 是由直线 $\begin{cases} x=0, \\ y=0 \end{cases}$ 绕直线 $\begin{cases} x=t, \\ y=t, \\ z=t \end{cases}$ (t为参数) 旋转一周得到的曲面，$\varSigma_1$ 是 $\varSigma$ 介于平面 $x+y+z=0$ 与平面 $x+y+z=1$ 之间部分的外侧，计算曲面侧积分

$$I=\iint\limits_{\varSigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解：由题意可知直线 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$，记为 l_1；$\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$，记为 l_2，则直线 l_1 绕直线 l_2 旋转所得曲面 Σ 为 $(x-t)^2+(y-t)^2+(z-t)^2=3t^2$ 。已知 Σ_1 是 Σ 介于平面 $x+y+z=0$ 和平面 $x+y+z=1$ 之间的外侧，则补面 $\Sigma_0: x+y+z=1$，方向指向外侧。则 Σ_0 与 Σ_1 所围为封闭区域，则由高斯公式可知

$$I_1=\oiint\limits_{\Sigma_0+\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)\mathrm{d}v=3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=3\cdot\frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$ (注：Ω 为圆锥体) 。

记 D_{xy} 为 Σ_0 在 xoy 面上的投影，$D_{xy}=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant x+y\leqslant 1, x\ge 0, y\ge 0\right\}$

又 $I_2=\iint\limits_{\Sigma_0} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(3-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=1$$

故 $I=I_1-I_2=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi-1.$

21.（本题满分 10 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ -1 & -1 & a\end{pmatrix}$, 已知 1 是 A 的特征多项式的重根.

(1)求 a 的值；

（2）求所有满足 $A\alpha=\alpha+\beta, A^2\alpha=\alpha+2\beta$ 的非零列向量 α，β.

解：（1） $f(\lambda)=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\ |=(1-\lambda)[(\lambda-a)(\lambda+1)+4]$

可得 $(1-a)(1+1)+4=0,\ \ a=3$

（2）由（1）可知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$,得 $\boldsymbol{A}$ 中 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$，

$$\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta},\left(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\beta}=2(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}$$

$\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right)^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,其中（$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$）^{2}=$\boldsymbol{0}$,故 $\boldsymbol{\alpha}$ 为任意的非零向量， $\boldsymbol{\alpha}=\left(a_1,a_2,a_3\right)^{\mathrm{T}}, a_1a_2a_3\neq0$

$$\Rightarrow\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ -1 & -1 & 2\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a_3-a_1-a_2\\ 2a_3-a_1-a_2\\ 2a_3-a_1-a_2\end{pmatrix}$$

其中 $a_1+a_2\neq2a_3$

则综上 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2a_3-a_1-a_2\\ 2a_3-a_1-a_2\\ 2a_3-a_1-a_2\end{pmatrix},\left(a_1a_2a_3\neq0,a_1+a_2\neq2a_3\ \right)$

22．（本题满分 12 分）

投保人的损失事件发生时，保险公司的赔付额 Y 与投保人的损失额 X 的关系为 $Y=\begin{cases}0, X\leq100,\\ x-100, X>100.\end{cases}$ 设定损事件发生时，投保人的损失额 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\times 100^2}{(100+x)^3}, x>0,\\ 0, x\le 0.\end{cases}$$

（1）求 $P\{Y>0\}$ 及 EY.

（2）这种损失事件在一年内发生的次数记为 N，保险公司在一年内就这种损失事件产生的理赔次数记为 M，假设 N 服从参数为 8 的泊松分布，在 $N=n\ (n\ge 1)$ 的条件下，M 服从二项分布 $B(n,p)$，其中 $p=P\{Y>0\}$，求 M 的概率分布.

解：

(1) $P\{Y>0\}=P\{X-100>0\}=P\{X>100\}=\int_{100}^{+\infty}\dfrac{2\times 100^2}{(100+x)^3}dx=\dfrac{1}{4}$

$$EY=\int_{100}^{+\infty}(x-100)\frac{2\times 100^2}{(100+x)^3}dx=50$$

(2)

$$N\sim P(8)=\{M|\ N=n\}\sim B\left(n,\frac{1}{4}\right)$$

$$P\{M=m\}=\sum_{n=m}^{\infty}P\{N=n\}\cdot P\{M=m|\ N=n)$$

$$=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{8^n}{n!}e^{-8}\cdot C_n^m\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^m\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-m}$$

$$=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{8^n}{n!}e^{-8}\cdot\frac{n!}{m!(n-m)!}\left(\frac{1}{4}\right)^m\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-m}$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^m e^{-8}\frac{8^m}{m!}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{8^{n-m}}{(n-m)!}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-m}$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^m e^{-8}\frac{8^m}{m!}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{6^{n-m}}{(n-m)!}=\frac{2^m}{m!}e^{-2}$$