2025 考研数学（二） 真题

试卷及解析

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1. 设函数 $z=z(x,y)$ 由 $z+\ln z-\int_y^x e^{-t^2}\mathrm{d}t=0$ 确定，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

A. $\dfrac{z}{z+1}\left(e^{-x^2}-e^{-y^2}\right)$.

B. $\dfrac{z}{z+1}\left(e^{-x^2}+e^{-y^2}\right)$.

C. $-\dfrac{z}{z+1}\left(e^{-x^2}-e^{-y^2}\right)$.

D. $-\dfrac{z}{z+1}\left(e^{-x^2}+e^{-y^2}\right)$.

1.【答案】A

【解析】$z+\ln z-\int_y^x e^{-t^2}dt=0$，分别对$x$，$y$求偏导，得：

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}-e^{-x^2}=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{z+1}e^{-x^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}+e^{-y^2}=0.\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-z}{z+1}e^{-y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{z+1}\left(e^{-x^2}-e^{-y^2}\right)$$

2.已知函数 $f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\sin t\mathrm{d}t$， $g(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\bullet\sin^2 x$，则

A． $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，也是 $g(x)$ 的极值点．

B． $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点．

C． $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点．

聚创考研网
考研辅导班+juchuang911 咨询
聚创教育 2004

D. $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，$(0,0)$ 也是曲线 $y=g(x)$ 的拐点.

【答案】B

【解析】

$f'(x)=e^{x^2}\sin x, f''(x)=2xe^{x^2}\sin x+e^{x^2}\cos x$

$f'(0)=0, f''(0)=1>0$.

$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点.

$g'(x)=e^{x^2}\sin^2 x+\sin 2x\int_0^x e^{t^2}dt$,

$g''(x)=e^{x^2}\sin 2x+2xe^{x^2}\sin^2 x+\sin 2xe^{x^2}+2\cos 2x\int_0^x e^{t^2}dt$

$g'(0)=0,\quad g''(0)=0,\quad g'''(0)>0$.

$(0,0)$ 是 $y=g(x)$ 的拐点.

3.如果对微分方程 $y''\text{-}2ay'+(a+2)y=0$ 任一解 $y(x)$，反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$ 均收敛，则 a 的取值范围为

A. $(-2,-1]$.　　B. $(-\infty,-1]$.

C. $(-2,\ 0)$.　　D. $(-\infty,\ 0)$.

3. 【答案】C

【解析】当 $a=-2$ 时，$y''+4y'=0$，通解：$c_1+c_2e^{-4t}$，$c\neq 0$ 时，$\int_0^{+\infty}(c_1+c_2e^{-4x})dx$ 不收敛.

故 B、D 排除.

当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$y''+y'+\frac{3}{2}y=0$，通解：$y(t)=e^{-\frac{1}{2}t}\left(a_1\cos\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right)+B\left(\sin\frac{\sqrt{5}}{2}t\right)\right)$

$\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 收敛.

聚创考研网 考研辅导班+juchuang911 咨询 聚创教育 2004

4.设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $x=0$ 某去心邻域内有定义且恒不为 0，若 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小，则当 $x\to 0$ 时

A. $f(x)+g(x)=o(g(x))$.

B. $f(x)g(x)=o(f^2(x))$.

C. $f(x)=o\left(e^{g(x)}-1\right)$.

D. $f(x)=o(g^2(x))$.

4.【答案】C

【解析】由题易知， $x\to 0$ 时， $f(x)$是$g(x)$高阶无穷小.

则有$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$， $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$.

又$f(x)$，$g(x)$在$x=0$某去心邻域内有定义且不恒等于 0.

故对于A选项，等式两端同除 $g(x)$ 得：

$$\frac{f(x)}{g(x)}+1=\frac{o[g(x)]}{g(x)}$$

取极限得

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}+1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{o[g(x)]}{g(x)}.$$

即$0+1=0$，显然 A 不成立.

对于 B 选项，等式两端同除 $f^2(x)$ 得

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{d[f^2(x)]}{f^2(x)}$$

两端取极限得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{o[f^2[x]}{f^2(x)}$，即$\infty=0$，显然不成立.

对于 C 选项，等式两端同除 $g(x)$ 得

聚创考研网 聚创教育 2004 考研辅导班+juchuang911 咨询

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{o\left[e^{g(x)}-1\right]}{g(x)}$$

取极限得 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{o\left[e^{g(x)}-1\right]}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{o[g(x)]}{g(x)}$

显然有$0=0$，故c正确.

对于 D 等式两端同除$g(x)$得

$$\frac{f(x)}{g^2(x)}=\frac{o[g^2(x)]}{g^2(x)}.$$

取极限得$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g^2(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{o[g^2(x)]}{g^2(x)}$，显然不成立.

综上选 C.

5．设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_{-2}^{2}\mathrm{d}x\int_{4-x^2}^{4}f(x,y)\mathrm{d}y=$

A．$\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$.

B．$\int_0^4\left[\int_{-2}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$.

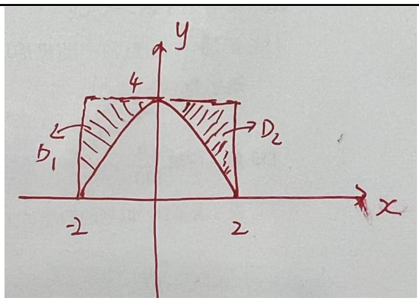
C．$\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{2}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$.

D．$2\int_0^4\mathrm{d}y\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x$.

【答案】A

【解析】由题易知，此二重积分积分区域为

聚创考研网
考研辅导班+juchuang911 咨询
聚创教育



$D=\left\{(x,y)\left|4-x^2\le y\le 4,-2\le x\le 2\right.\right\}$，对应图像为上图所示。

记 $D_1=\left\{(x,y)\left|4-x^2\le y\le 4,-2\le x\le 0\right.\right\}$，$D_2=\left\{(x,y)\left|4-x^2\le y\le 4,0\le x\le 2\right.\right\}$，且

$I=\int_{-2}^{2}dx\int_{4-x^2}^{4}f(x,y)dy$，则 $I=\iint\limits_{D_1}f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_2}f(x,y)d\sigma$，交换积分次序得

$$I=\int_0^4dy\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f(x,y)dx+\int_0^4dy\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)dx$$

$$=\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f(x,y)dx+\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)dx\right]dy$$

故 A 正确。

6. 设单位质点 P,Q 分别位于点 $(0,0)$ 和 $(0,1)$ 处，P 从点 $(0,0)$ 出发沿 x 轴正向移动，记 G 为引力常量，则当质点 P 移动到点 $(l,0)$ 时，克服质点 Q 的引力所做的功为（　　）

A. $\int_0^l\frac{G}{x^2+1}dx$　　B. $\int_0^l\frac{Gx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}dx$

C. $\int_0^l\frac{G}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}dx$　　D. $\int_0^l\frac{G(x+1)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}dx$

【答案】A

【解析】由题可知，其对应如图所示.

单位质点 P 与单位质点 Q 之间的引力为

$$F=G\frac{1\cdot 1}{r^2}$$

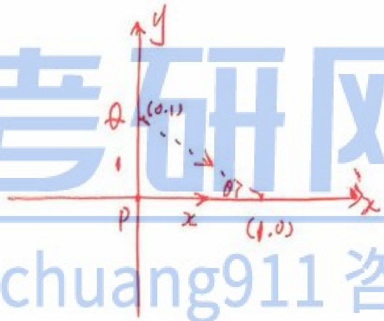
聚创考研网 考研辅导班+juchuang911 咨询 聚创教育 2004

其中r为两质点间的距离.

且由图可知 $r^2 = x^2 + 1$

又引力 F 在x方向上的力投影为 $F_x = F\cos\ \theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}F.$

故克服引力做功为：



$$W = \int_0^1 F_x \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{G}{(x^2+1)} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{Gx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x$$

7.设函数 $f(x)$ 连续，给出下列 4 个条件：

① $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|f(x)| - f(0)}{x}$ 存在；

② $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - |f(0)|}{x}$ 存在；

③ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|f(x)|}{x}$ 存在；

④ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|f(x) - f(0)|}{x}$ 存在.

其中可得到“ $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导”的条件个数为

A.1 .　　B.2 .　　C.3.　　D.4.

7.【答案】B

【解析】① $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|f(x)| - f(0)}{x} = A.$

$\Rightarrow |f(0)| - f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = |f(0)| \Rightarrow f(0) = 0.$ 或$f(0)$为正.

聚创考研网 考研辅导班+juchuang911 咨询 聚创教育 2004

若$f(0)$为正，则当$x\to 0$时．有 $f(x)>0$.则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{|f(x)-f(0)|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=A\Rightarrow f'(0)=A$

若$f(0)=0$，由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|f(x)|-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{x}=A$

$\Rightarrow\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 0^+}\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|=A\\ \lim\limits_{x\to 0^-}-\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|=A\end{matrix}$ $\Rightarrow$ 若$A=0$，则$f'(0)$存在，若$A\neq 0$，则$f'(0)$不存在.

②由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-|f(0)|}{x}=A\Rightarrow f(0)=|f(0)|$，则$f(0)=0$或$f(0)>0$

若$f(0)=0$，则$A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-|f(0)|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)$

若$f(0)>0$，则$A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$ 从而②成立.

③由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{x}$ 存在，则 $|f(0)|=0\Rightarrow f(0)=0$. 则同①，从而③错.

④ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x}$ 存在，则$|f(x)|$在$x=0$处可导$\Rightarrow f(x)$在$x=0$处可导，④正确.

从而①③错误，②④正确，选 B.

8.设矩阵$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&a&0\\0&0&b\end{pmatrix}$有一个正特征值和两个负特征值，则（　　）

A.$a>4,b>0$　　　　B.$a<4,b>0$

C.$a>4,b<0$　　　　D.$a<4,b<0$

【答案】D

【解析】

聚创考研网
考研辅导班+juchuang911 咨询
聚创教育 2004

令 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&a&0\\0&0&b\end{pmatrix}$，为实对称矩阵，对应二次型为 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+bx_3^2+4x_1x_2$，

则用配方法将其化为标准型，$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2)^2+(a-4)x_2^2+bx_3^2$。已知 A 有一正两负特征值，则

$\begin{cases}a-4<0\\ b<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<4\\ b<0\end{cases}$，故选 D.

聚创考研网
聚创教育 2004
考研辅导班+juchuang911 咨询

9. 下列矩阵中，可以经过若干初等行变换得到矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 的是

A. $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&2&1&3\\2&3&1&4\end{pmatrix}$.

B. $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&2&5\\1&1&1&3\end{pmatrix}$.

B. $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&3\\0&1&0&0\end{pmatrix}$.

D. $\begin{pmatrix}1&1&2&3\\1&2&2&3\\2&3&4&6\end{pmatrix}$.

9. 【答案】B

【解析】

聚创考研网
聚创教育 2004
考研辅导班+juchuang911 咨询

A 选项：$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&2&1&3\\2&3&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&2\\0&1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

B 选项：$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&2&5\\1&1&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&2&4\\0&0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

C 选项：$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&3\\0&1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

D 选项：$\begin{pmatrix}1&1&2&3\\1&2&2&3\\2&3&4&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

聚创考研网
考研辅导班+juchuang911 咨询

聚创考研网
考研辅导班+juchuang911 咨询

10.设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{BA})+1$, 则

A.方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

B.方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 均只有零解.

C.方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 没有公共非零解.

D.方程组 $\boldsymbol{ABAx}=\boldsymbol{0}$ 与方程组 $\boldsymbol{BABx}=\boldsymbol{0}$ 有公共非零解.

【答案】D

【解析】

取 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}$,则 $AB=\begin{pmatrix}3&0&-3\\3&0&-3\\3&0&3\end{pmatrix}$，$r(AB)=1$.

$BA=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$r(BA)=0$.排除 B，C.

$A+B=\begin{pmatrix}2&1&0\\2&1&0\\2&1&0\end{pmatrix}$，$r(A+B)=1$排除 A,故选 D.

聚创考研网
考研辅导班+juchuang911 咨询
聚创教育 2004

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11.设 $\int_{1}^{+\infty}\dfrac{a}{x(2x+a)}\mathrm{d}x=\ln 2$，则 $a=$______.

【解析】$a=2$.

原式

$$=\int_1^{+\infty}\frac{a}{x(2x+a)}dx=\ln x-\ln(2x+a)\Big|_1^{+\infty}=\int_1^{+\infty}\frac{a}{x(2x+a)}dx=\ln x-\ln(2x+a)\Big|_1^{+\infty}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x}{2x+a}-\ln\frac{1}{2+a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+a}+\ln(2+a)$$

$$\therefore \ln\frac{1}{2}+\ln(2+a)=\ln 2$$

$$\ln(2+a)=2\ln 2\Rightarrow a=2$$

12.曲线 $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}$ 的渐近线方程为______.

【解析】$y=x-1$

可得无水平渐近线、铅直渐近线，故求斜渐近线即可.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{x^2-3x^2+1}{x^3}}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}-x=\lim_{x\to\infty}x\cdot\left(\left(1+\frac{1-3x^2}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1-3x^2}{x^3}=-1$$

故 $y=x-1$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left[\ln\frac{1}{n}+2\ln\frac{2}{n}+\cdots+(n-1)\ln\frac{n-1}{n}\right]=$______ .

【解析】

聚创考研网 考研辅导班+juchuang911 咨询 聚创教育 2004

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left[\ln\frac{1}{n}+2\ln\frac{2}{n}+\cdots+(n-1)\ln\frac{n-1}{n}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\ln\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\ln\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\ln\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\ln\frac{n-1}{n}+\frac{n}{n}\ln\frac{n}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\ln\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}\\
&=\int_0^1 x\ln x dx\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1 \ln x dx^2=\frac{1}{2}\left[x^2\ln x|_0^1-\int_0^1 x^2\cdot\frac{1}{x}dx\right)\\
&=-\frac{1}{2}\int_0^1 xdx=-\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

聚创考研网
考研辅导班+juchuang911 咨询
聚创教育 2004
聚创考研网
考研辅导班+juchuang911 咨询
聚创教育 2004

14.已知函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\ln(1+2t), \\ 2t-\int_1^{y+t^2} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=0 \end{cases}$ 确定，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=0}=$ ______ .

【解析】

$$\begin{cases} x=\ln(1+2t)①, \\ 2t-\int_1^{y+t^2} e^{-u^2}du=0②, \end{cases}$$

由②两边关于t求导，则$2-e^{-(y+t^2)^2}\cdot\left(\frac{dy}{dt}+2t\right)=0.$

当 $t=0$ 时，$y=1$，$2-e^{-1}\cdot\frac{dy}{dt}=0\Rightarrow\frac{dy}{dt}=2e.$

则 $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\Bigg|_{t=0}=\frac{2e}{2}=e.$

15.微分方程 $(2y-3x)\mathrm{d}x+(2x-5y)\mathrm{d}y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解为 ______ .

【答案】$3x^2-4xy+5y^2=4$

【解析】

解：

$$\begin{aligned}
&(2y-3x)\mathrm{d}x+(2x-5y)\mathrm{d}y=0 \\
&\Rightarrow 2y\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y-3x\mathrm{d}x-5y\mathrm{d}y=0 \\
&\Rightarrow \mathrm{d}(2xy)-\mathrm{d}(\frac{3}{2}x^2)-\mathrm{d}(\frac{5}{2}y^2)=0
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(2xy-\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{2}y^2)=0 \\
&\Rightarrow 2xy-\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{2}y^2=c
\end{aligned}$$

聚创考研网
考研辅导班+juchuang911 咨询
聚创教育 2004

又因为

$$y(1)=1$$

则

$$2-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}=c,\Rightarrow c=-2$$

即

$$2xy-\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{2}y^2=-2$$
$$3x^2-4xy+5y^2=4$$

则所求方程为 $y=\dfrac{2x+\sqrt{20-11x^2}}{5}$.

16. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)$，若 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关，且 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$，则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{a}_4$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=$______.

【答案】 $k\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\4\end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数

【解析】由于 $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3+\alpha_4$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关；且已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 $r(A)=3$。那么 $Ax=\alpha_1+4\alpha_4$ 等价于 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\4\end{pmatrix}=\alpha_1+4\alpha_4$，故 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\4\end{pmatrix}$ 是 $Ax=\alpha_1+4\alpha_4$ 的一个特解。又因为 $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3+\alpha_4$，即 $\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4=0$，则 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}=0$。由 $s=n-r(A)=4-3=1$ 可得，$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解

系，故 $Ax=\alpha_1+4\alpha_4$ 的通解为

$$k\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\4\end{pmatrix}$$，其中 k 为任意常数。

聚创考研网
聚创教育 2004
考研辅导班+juchuang911 咨询

聚创考研网
聚创教育 2004
考研辅导班+juchuang911 咨询

三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（本题满分 10 分）

计算 $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)}\mathrm{d}x.$

17．解：

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)}dx=\int_0^1\left(\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+2}\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{\frac{1}{5}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{3}{5}}{x^2-2x+2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{5}\ln|1+x|\Big|_0^1-\frac{1}{10}\ln\left|x^2-2x+2\right|\Big|_0^1+\frac{2}{5}\arctan(x-1)\Big|_0^1=\frac{3}{0}\ln 2+\frac{1}{10}\pi.$$

18.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)-\mathrm{e}^{2\sin x}+1}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}=-3.$

证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,并求 $f'(0)$.

18 解：

已知 $\ln(1+x)+\ln(1-x)=x-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)-x-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)=-x^2+o\left(x^2\right)$

$$e^{2\sin x}=1+2\sin x+\frac{1}{2}(2\sin x)^2+o\left(x^2\right)=1+2\sin x+2\sin^2 x+o\left(x^2\right)$$

因此，$-3=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)-e^{2\sin x}+1}{-x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)-\left(1+2\sin x+2\sin^2 x+o\left(x^2\right)\right)+1}{-x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-2\sin x}{-x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{-x^2}$$

聚创考研网 考研辅导班+juchuang911 咨询 聚创教育 2004

可以得出 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-2\sin x}{-x^2}=-5$， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-2\left(x-\dfrac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right)}{x^2}=5$，

进一步可以得出 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-2x}{x^2}=5$，以及 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}=5$，

$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)-2]=0$，可得 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2=f(0)$，故 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}=5$。

聚创考研网
聚创教育 2004
考研辅导班+juchuang911 咨询
聚创考研网
聚创教育 2004
考研辅导班+juchuang911 咨询

19.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x,y)$ 可微，且满足 $\mathrm{d}f(x,y)=-2x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{-y}\left(x^2-y-1\right)\mathrm{d}y$, $f(0,0)=2$, 求 $f(x,y)$，并求 $f(x,y)$ 的极值.

19. 解：

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-2xe^{-y}\Rightarrow f(x,y)=-x^2e^{-y}+\varphi(y)$. 则 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2e^{-y}+\varphi'(y)=e^{-y}x^2-(y+1)e^{-y}$

则 $\varphi'(y)=-(y+1)e^{-y}$

$\Rightarrow\varphi(y)=(y+2)e^{-y}+C$

则

$f(x,y)=-x^2e^{-y}+(y+2)e^{-y}+C$

又 $f(0,0)=2$, $\Rightarrow \mathrm{C}=0$

则 $f(x,y)=-x^2e^{-y}+(y+2)e^{-y}$.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=-2xe^{-y}=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=e^{-y}(x^2-y-1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=-1\end{cases}$$

则驻点（0，-1）

$f''_{xx}=-2e^{-y}, f''_{xy}=2xe^{-y}, f''_{yy}=e^{-y}(x^2-y-1)-e^{-y}=e^{-y}(x^2-y)$

在点（0，-1）处 $A=-2e, B=0, C=-e$

则 $AC-B^2>0, A<0$, 从而 $f(x,y)$ 在（0,−1）处有极大值，且极大值为

$f(0,-1)=e$

聚创考研网
考研辅导班+juchuang911 咨询
聚创教育 2004

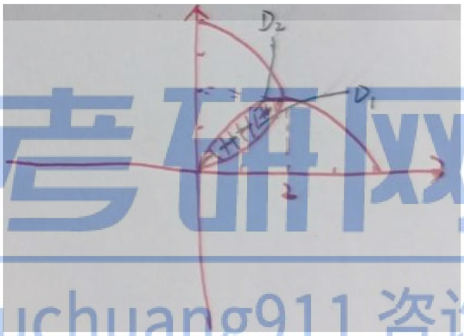
20.（本题满分 12 分）

已知平面有界区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4x, x^2+y^2\le 4y\}$,计算$\iint_D (x-y)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【答案】 $12\pi-\dfrac{16}{3}$

由题可知，积分区域$D=\left\{(x,y)|(x-2)^2+y^2\le 2^2, x^2+(y-2)^2\le 2^2\right\}$

对应图形为右图所示，



显然积分区域关于$y=x$对称

记$D_1=\left\{(x,y)|\ x^2+(y-2)^2\le 2^2, y \bullet x\right\}$

$D_2=\left\{(x,y)|(x-2)^2+y^2 \bullet 2^2, y 开 x\right\}$

故$I=\iint\limits_{D}(x-y)^2dxdy=\iint\limits_{D_1}(x-y)^2dxdy+\iint\limits_{D_2}(x-y)^2dxdy$

$=2\iint\limits_{D_1}(x-y)^2dxdy$

令$x=r\cos\theta . y=r\sin\theta$ 则在积分区域D_1上有$\begin{cases}0\bullet r\bullet 4\cos\theta\\ 0\bullet\theta\bullet\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$

则$\iint\limits_{D_1}(x-y)^2dxdy=\iint\limits_{D_1}\left(x^2+y^2-2xy\right)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{4\cos\theta}\left(r^2-2r^2\cos\theta\sin\theta\right)rdr$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{4\cos\theta}\left(r^3-2r^3\cos\theta\sin\theta\right)dr=6\pi-\dfrac{8}{3}$

故$I=2(6\pi-\dfrac{8}{3})=12\pi-\dfrac{16}{3}$.

聚创考研网 考研辅导班+juchuang911 咨询 聚创教育 2004

21.（本题满分 12 分）

设函数$f(x)$在区间(a,b)内可导.证明导函数$f'(x)$在(a,b)内严格单调增加的充分必要条件是:

对(a,b)内任意的x_1,x_2,x_3,当$x_1<x_2<x_3$时,$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

解：充分性：若对(a,b)内任意的x_1,x_2,x_3，当$x_1<x_2<x_3$时，都有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

则在(a,b)内取任意的$x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$，有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}<\frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}<\frac{f(x_5)-f(x_4)}{x_5-x_4}$$

在$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$两边同时令$x_2\to x_1^+$，得

$f_+'(x_1)\le\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$，两边同时令$x_2\to x_3^-$，得$\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\le f_-'(x_3)$，即

$f_+'(x_1)\le\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\le f_-'(x_3)$，同理可得$f_+'(x_3)\le\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\le f_-'(x_5)$.因为

$\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}<\frac{f(x_5)-f(x_3)}{x_5-x_3}$,所以$f_+'(x_1)\le f_-'(x_5)$.由$x_1,x_5$的任意性,可得$f'(x)$在$(a,b)$内严格单调递增，充分性得证。

再证必要性，即已知$f'(x)$单调递增，在$[x_1,x_2],[x_2,x_3]$上分别使用拉格朗日中值定理，知存在$\xi_1\in(x_1,x_2),\xi_2\in(x_2,x_3)$，使

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}，\quad f'(\xi_2)=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2},$$

又由$f'(x)$单调递增，且$\xi_1<\xi_2$知，$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$，即

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$，必要性得证。

聚创考研网
聚创教育 2004
考研辅导班+juchuang911 咨询

综上所述，充要条件得证。

22.（本题满分 12 分）

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & a\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}k & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 合同.

(1)求 a 的值及 k 的取值范围;

(2)若存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$, 求 k 及 $\boldsymbol{Q}$.

（1）A 与 B 合同知，二者有相同的正负惯性指数
显然，B 的特征值为 K、6、0，故 A 有特征值 0.故 $|A|=0$.
计算得 $|A|=-3(a-4)$ ，即有 $a=4$.
此时 $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-3)(\lambda-6)$.
知A的特征值为 3、6、0.　　P=2. 故 k>0.
(2)由 $Q^{\mathrm{T}}AQ=B$，知$Q^{-1}AQ=B$.
故A、B相似，特征值相同，故 $k=3$.对 A:$\lambda=3$时，解 $(3E-A)X=0$，

得 $c_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\lambda=6$时，解$(6E-A)x=0$，得 $c_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

$\lambda=0$时，解$(0\cdot E-A)x=0$得 $c_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$

再单位化得：　$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$.

聚创考研网
聚创教育 2004
考研辅导班+juchuang911 咨询
聚创考研网
聚创教育 2004
考研辅导班+juchuang911 咨询