绝密★启用前

考生编号	
姓名	

2024 年全国硕士研究生招生考试

数学（二）

一、选择题：（1-10 小题，每小题 5 分，共 50 分。下列每题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. 函数 $f(x)=|x|^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}}$ 的第一类间断点的个数为（　　）

（A） 3　　（B） 2　　（C） 1　　（D） 0

2. 已知 $\begin{cases} x=1+t^3 \\ y=e^{t^2} \end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[f\left(2+\frac{2}{x}\right)-f(2)\right]=$（　　）

（A） $2e$　　（B） $\frac{4}{3}e$　　（C） $\frac{2}{3}e$　　（D） $\frac{e}{3}$

3. 已知 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^3 dt$，$g(x)=\int_0^x f(t)dt$，则（　　）

（A） $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为奇函数　　（B） $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数

（C） $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为偶函数　　（D） $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数

4. 已知数列 $\{a_n\}(a_n\neq 0)$，若 $\{a_n\}$ 发散，则（　　）.

（A） $\left\{a_n+\frac{1}{a_n}\right\}$ 发散　　（B） $\left\{a_n-\frac{1}{a_n}\right\}$ 发散　　（C） $\left\{e^{a_n}+\frac{1}{e^{a_n}}\right\}$ 发散　　（D） $\left\{e^{a_n}-\frac{1}{e^{a_n}}\right\}$ 发散

5. 已知函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}, & xy\neq 0 \\ 0, & xy=0\end{cases}$，则在点 $(0,0)$ 处（　　）.

（A） $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 连续，$f(x,y)$ 可微　　（B） $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 连续，$f(x,y)$ 不可微

（C） $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 不连续，$f(x,y)$ 可微　　（D） $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 不连续，$f(x,y)$ 不可微

6. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy=$（　　）.

（A）$\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y}f(x,y)dx$　　　　（B）$\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}f(x,y)dx$

（C）$\int_{0}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y}f(x,y)dx$　　　　（D）$\int_{0}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}f(x,y)dx$

7. 设非负函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，给定以下三个命题：

（1）若 $\int_0^{+\infty}f^2(x)dx$ 收敛，则 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛；

（2）若存在 $p>1$，使极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)$ 存在，则 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛；

（3）若 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则存在 $p>1$，使极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)$ 存在；

其中正确的个数是（　）

（A）0　　　　（B）1　　　　（C）2　　　　（D）3

8. 设 A 为三阶矩阵，$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，若 $P^TAP^2=\begin{pmatrix}a+2c&0&c\\0&b&0\\2c&0&c\end{pmatrix}$，则矩阵 A 为（　）

（A）$\begin{pmatrix}c&0&0\\0&a&0\\0&0&b\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}b&0&0\\0&c&0\\0&0&a\end{pmatrix}$　　（C）$\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}c&0&0\\0&b&0\\0&0&a\end{pmatrix}$

9. 设 A 为四阶矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，若 $A(A-A^*)=O$，且 $A\neq A^*$，则 $r(A)$ 的可能取值为（　）

（A）0 或 1　　　　（B）1 或 3　　　　（C）2 或 3　　　　（D）1 或 2

10. 设 A,B 均为 2 阶矩阵，且 $AB=BA$，则"A 有两个不相等的特征值"是"B 可对角化"的（　　）

（A）充要条件　　（B）充分非必要条件　　（C）必要非充分条件　　（D）既非充分又非必要条件

二、填空题：（11-16 小题，每小题 5 分，共 30 分.）

11. 曲线 $y^2=x$ 在点 $(0,0)$ 处的曲率圆方程为________

12. 函数 $f(x,y)=2x^3-9x^2-6y^4+12x+24y$ 的极值点是________

13. 微分方程 $y' = \dfrac{1}{(x+y)^2}$ 满足初始条件 $y(1)=0$ 的解为________

14. 已知函数 $f(x) = x^2(e^x - 1)$，则 $f^{(5)}(1) =$________

15. 某物体以速度 $v(t) = t + k\sin \pi t$ 做直线运动，若它从 $t=0$ 到 $t=3$ 的时间段内平均速度是 $\dfrac{5}{2}$，则 $k =$______

16. 设向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \\ a \end{pmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，且其中任意两个向量均线性无关，则

$ab =$________

三、解答题：（17-22 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17. 设平面有界区域 D 位于第一象限，由曲线 $xy = \dfrac{1}{3}$，$xy = 3$ 与直线 $y = \dfrac{1}{3}x$，$y = 3x$ 围成，计算

$$\iint\limits_D (1 + x - y)dxdy$$

18. 设 $y = y(x)$ 满足方程 $xy'' + xy' - 9y = 0$，且 $y\big|_{x=1} = 2$，$y'\big|_{x=1} = 6$

（1）利用变换 $x = e^t$ 化简方程，并求 $y(x)$ 的表达式

（2）求 $\int_1^2 y(x)\sqrt{4 - x^2}dx$

19. 设 $t > 0$，求曲线 $y = \sqrt{x}e^{-x}$ 与直线 $x = t$，$x = 2t$ 及 x 轴所围平面图形，绕 x 轴旋转所得的旋转体体积为 $V(t)$，求 $V(t)$ 的最大值.

20. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导，$g(x,y) = f(2x+y, 3x-y)$，且 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - 6\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1$

（1）求 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$

（2）若 $\dfrac{\partial f(u,0)}{\partial u} = ue^{-u}$，且 $f(0,v) = \dfrac{1}{50}v^2 - 1$，求 $f(u,v)$ 的表达式

21. 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数，且 $f'(0)=f''(1)$，$|f(x)|\le 1$。证明：

（1）当 $x\in(0,1)$ 时，$\left|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\right|\le\dfrac{x(1-x)}{2}$

（2）$\left|\int_0^1 f(x)dx-\dfrac{f(0)+f(1)}{2}\right|\le\dfrac{1}{12}$

22. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & a\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ b & 2\end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TBAx$

已知方程组 $Ax=0$ 的解是 $B^Tx=0$ 的解，但两个方程组不同解。

（1）求 a,b 的值；

（2）求正交矩阵 $x=Qy$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形

一、选择题：1-10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是最符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)【答案】(C) 第一类间断点只有一个

(2)【答案】(B) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(f\left(2+\dfrac{2}{x}\right)-f(2)\right)=\dfrac{4}{3}e$

(3)【答案】(D) $f(x)$是偶函数， $g(x)$是奇函数

(4)【答案】(D) $\{e^{a_n}-\dfrac{1}{e^{a_n}}\}$发散

(5)【答案】(C) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$不连续， $f(x,y)$可微

(6)【答案】(A) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x,y)dx$

(7)【答案】(B) 真命题个数为 1

(8)【答案】(C) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

(9)【答案】(D) 1 或 2

二、填空题：11-16 小题，每小题 5 分，共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(11)【答案】$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$或$x^2-x+y^2=0$.

(12)【答案】(1,1)

(13)【答案】$y-\arctan(x+y)=-\frac{\pi}{4}$

(14)【答案】$3\,1e$

(15)【答案】$\frac{3\pi}{2}$

(16)【答案】$ab=-4$

三、解答题：17-22 小题，共 70 分. 请将解答写在答题纸指定位置上.

解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17)（本题满分 10 分）

【答案】$\frac{8}{3}\ln 3$

(18)（本题满分 12 分）

【答案】(1) $\frac{d^2y}{dt^2}-9y=0$，$y(x)=2x^3$；　(2) $\frac{22}{5}\sqrt{3}$

(19)（本题满分 12 分）

【答案】最大值为 $V(\ln 2)=\frac{\pi}{16}(\ln 2+\frac{3}{4})$.

(20)（本题满分 12 分）

【答案】(1) $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}=\frac{1}{25}$；(2) $f(u,v)=\frac{1}{25}uv-e^{-u}(u+1)+\frac{1}{50}v^2$.

(21)（本题满分 12 分）

【解析】略

(22)（本题满分 12 分）

【解析】(1) $a=1, b=2$；(2) 标准形为 $f=6y_3^2$.